Numerische Mathematik II — Übungsblatt 1

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 1 (Schwingungen I) (schriftlich – 4 Punkte)
Betrachten Sie zu $M, C, R \in \mathbb{R}^{N,N}$ und $f : [0,T] \to \mathbb{R}^N$, sowie den Anfangswerten $\dot u(0) = v^0 \in \mathbb{R}^N$, $u(0) = u^0 \in \mathbb{R}^N$ das System N gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$M\ddot u(t) + 2C\dot u(t) + Ru(t) = f(t)\,, \qquad t \in [0,T]\,.$$

(a) Zeigen Sie: $\frac{d}{dt}\big(y(t)^T Ry(t)\big) = y(t)^T(R + R^T)\dot y(t)$ für $y \in C^1([0,T], \mathbb{R}^N)$.

(b) M und R seien symmetrisch und positiv definit und in $\mathbb{R}^N$ seien dadurch die Normen $|v|_M = \sqrt{v^T Mv}$ und $|v|_R = \sqrt{v^T Rv}$ definiert. Zeigen Sie, dass für eine Lösung $u(t)$ der Differentialgleichung für alle $t \ge 0$ folgende "Energiebilanz" gilt:

$$\tfrac12|\dot u(t)|_M^2 + \tfrac12|u(t)|_R^2 = \tfrac12|v^0|_M^2 + \tfrac12|u^0|_R^2 + \int_0^t f(s)^T\dot u(s) - 2\dot u(s)^T C\dot u(s)\,ds\,.$$

(c) Berechnen Sie im Falle $N = 1$ für $M = 1$, $C \ge 0$ und $R \ge 0$ explizit die Lösung der homogenen Gleichung, d.h. für $f(t) = 0$. Wie sehen die Lösungen in den Fällen $R < C^2$, $R = C^2$ und $R > C^2$ qualitativ aus?

Aufgabe 2 (Schwingungen II) (schriftlich – 4 Punkte)
Betrachten Sie nochmals die Schwingung $M\ddot u(t) + Ru(t) = 0$ wie in Aufgabe 1(b). Bezüglich der Schrittweite $\tau > 0$ seien die diskreten Zeitpunkte $t_n = n\tau$, $n \in \mathbb{N}$ gegeben. An den diskreten Zeitpunkten t_n sei der diskrete Ableitungsoperator $\partial_\tau u^n = \frac{1}{\tau}(u^n - u^{n-1})$, sowie der Mittelungsoperator $\{u^n\} = \frac12(u^n + u^{n-1})$ definiert. Zeigen Sie:

(a) Für $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ beliebig und Folgen u^n, v^n gilt

$$(\partial_\tau u^n)^T A\{v^n\} + (\{u^n\})^T A\partial_\tau v^n = \frac{1}{\tau}\Big((u^n)^T Av^n - (u^{n-1})^T Av^{n-1}\Big).$$

(b) Es sei u^0 und u^1 gegeben und für $n \ge 2$ sei u^n durch die Gleichung

$$(*) \qquad M\partial_\tau(\partial_\tau u^n) + R\{\{u^n\}\} = 0\,, \qquad \text{bzw.}$$
$$\tfrac{1}{\tau^2}M\big(u^n - 2u^{n-1} + u^{n-2}\big) + R\big(\tfrac14 u^n + \tfrac12 u^{n-1} + \tfrac14 u^{n-2}\big) = 0$$

bestimmt. Dann gilt für alle $m \ge 1$ die "diskrete Energiebilanz"

$$|\partial_\tau u^m|_M^2 + |\{u^m\}|_R^2 = |\partial_\tau u^1|_M^2 + |\{u^1\}|_R^2\,.$$

(c) Formulieren Sie anhand von Gleichung $(*)$ einen Algorithmus zur Bestimmung von u^n für $n \ge 2$, der lediglich einmal eine Cholesky-Zerlegung benötigt.

Aufgabe 3 (mündlich)
Die drei befreundeten Schildkröten S_1, S_2 und S_3 sind am liebsten zusammen. Leider befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ aber jede Einzelne jeweils $d > 0$ Meter von ihren beiden Freunden entfernt, d.h. von oben betrachtet befinden sich die Schildkröten auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge d. Um diesen Zustand zu ändern beschließt jede Schildkröte S_k, zu jeder Zeit $t \ge 0$ genau in Richtung von Schildkröte $S_{(k+1)\text{mod}3}$ zu laufen, $k \in \{1, 2, 3\}$. Alle drei Schildkröten sind gleich schnell und bewegen sich konstant mit der Absolutgeschwindigkeit v.

(a) Formulieren Sie den Standort $s_k(t)$, $k \in \{1, 2, 3\}$, der Schildkröten anhand von Polarkoordinaten in der Ebene, d.h. $s_k(t) = r_k(t)\exp(i\Phi_k(t))$, wobei der Schwerpunkt des Dreiecks der Ursprung des Koordinatensystems sei und $r_k(t)$ bzw. $\Phi_k(t)$ den Radius und Winkel zur Zeit t beschreiben.

(b) Geben Sie eine Formel für die Momentangeschwindigkeit $\dot s_k(t)$ an, indem Sie einen Zusammenhang zwischen der Position von S_k und der Position von $S_{(k+1)\text{mod}3}$ aufstellen. Zeigen Sie, dass $s_k(t)$ folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$(*) \qquad \dot s_k(t) = \frac{v}{\sqrt3}\Big(-\frac32 + i\frac{\sqrt3}{2}\Big)\exp(i\Phi_k(t))\,.$$

(c) Stellen Sie durch Differenzieren des Ansatzes $s_k(t) = r_k(t)\exp(i\Phi_k(t))$ und Vergleichen mit $(*)$ eine Differentialgleichung für $r_k(t)$ auf und errechnen Sie den Zeitpunkt, an dem sich die Schildkröten im Ursprung des Koordinatensystems treffen.

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Donnerstag, den 29.10.2009, 8.00 Uhr** in den Einwurfkasten "Numerische Mathematik II" (im 1. Stock von Gebäudeteil C des Allianz-Gebäudes) einzuwerfen oder in der Übung abzugeben.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Homepage:
http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numa12009w/

Übungsbetrieb / Rechnerpraktikum:
Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern sowie Attestierung von Programmieraufgaben) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.