

Numerische Mathematik II

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 2

Aufgabe 4 (schriftlich – 3 Punkte)

Sei $f \in C^1([t_0, t_0 + T] \times \overline{G}, \mathbb{R}^M)$, wobei $G \subset \mathbb{R}^M$ beschränkt und konvex sei. Zeigen Sie, dass f dann eine Lipschitz-Bedingung in \overline{G} erfüllt, d.h. es existiert $L \geq 0$, sodass

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|, \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + T], \quad y, z \in \overline{G}.$$

Aufgabe 5 (schriftlich – 5 Punkte)

Betrachten Sie den ungedämpften harmonischen Oszillator

$$(*) \quad \ddot{u}(t) = -u(t), \quad u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 1.$$

mit der Lösung $u(t) = \sin(t)$.

- (a) Formulieren Sie (*) als System 1. Ordnung und zeigen Sie, dass die Näherungslösungen des expliziten und impliziten Euler-Verfahrens mit fester Schrittweite τ zum Zeitpunkt $t_n = n\tau$, $n \geq 2$, jeweils Rekursions-/Differenzenformeln

$$\alpha u^n + \beta u^{n-1} + \gamma u^{n-2} = 0$$

genügen. Bestimmen Sie in beiden Fällen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

- (b) Benutzen Sie den Ansatz $u^n = A\lambda^n + B\mu^n$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ um die Differenzenformeln aus Teil (a) zu lösen.

Hinweis: λ^k bzw. μ^k bezeichnet hier die k -te Potenz von λ bzw. μ .

- (c) Für festes $\tau > 0$ gilt für die Näherungswerte

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |u^n| = \infty \quad \text{beim expliziten Euler-Verfahren,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u^n| = 0 \quad \text{beim impliziten Euler-Verfahren.}$$

Vergleichen Sie dies mit dem Verhalten der exakten Lösung $u(t)$ für $t \rightarrow \infty$.

Aufgabe 6 (Allgemeines Gronwall-Lemma) (mündlich)

Seien $a, b : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (d.h. $a(t), b(t) \geq 0$ für alle $t \in [t_0, t_0 + T]$) integrierbar sowie $c \geq 0$ gegeben. Zudem sei $d : [t_0, t_0 + T]$ stetig und es gelte

$$d(t) \leq \int_{t_0}^t a(s) d(s) ds + \int_{t_0}^t b(s) ds + c, \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Zeigen Sie, dass dann für alle $t \in [t_0, t_0 + T]$ folgende Ungleichung gilt:

$$d(t) \leq \left(\int_{t_0}^t b(s) ds + c \right) \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right).$$

Wie muss a, b, c gewählt werden, um das Gronwall-Lemma aus der Vorlesung zu erhalten?

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Donnerstag, den 5.10.2009, 8.00 Uhr** in den Einwurfkasten "Numerische Mathematik II" (im 1. Stock von Gebäudeteil C des Allianz-Gebäudes) einzuwerfen oder in der Übung abzugeben.

Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Homepage:

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numa12009w/>

Übungsbetrieb / Rechnerpraktikum:

Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern sowie Attestierung von Programmieraufgaben) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.

Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.