Numerische Mathematik II — Übungsblatt 3

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 7 (schriftlich – 4 Punkte)

Zu $f \in C^3\big([t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^M, \mathbb{R}^M\big)$ sei das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t))\,, \qquad u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^M\,,$$

gegeben. Betrachten Sie ausgehend von $u^0 = u_0$ das Einschrittverfahren

$$u^n = u^{n-1} + \tau_n \psi(t_{n-1}, \tau_n, u^{n-1})\,,$$

wobei

$$\psi(t,\tau,z) = f(t,z) + \tfrac{\tau}{2} h\Big(t + c\tau, z + c\tau f(t,z)\Big)\,,$$
$$h(t,z) = \tfrac{\partial}{\partial t} f(t,z) + \Big(\tfrac{\partial}{\partial z} f(t,z)\Big) f(t,z)\,.$$

Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$, sodass die Konsistenzordnung des Verfahrens maximal wird.

Aufgabe 8 (schriftlich – 4 Punkte)

Betrachten Sie ein S-stufiges Runge-Kutta-Verfahren mit dem Butcher-Schema $(\mathcal{A}, b, c)$, und es gelte $\mathcal{A}e = c$, wobei $e = (1,\dots,1)^T$. Zudem seien b_s und c_s, $s = 1,\dots,S$, die Gewichte und Stützstellen der Quadraturformel $I_{S-1}(g) = \sum_{s=1}^{S} b_s g(c_s) \approx \int_0^1 g(t)\,dt$.

(a) Betrachten Sie die Trapezregel $I_1(g) = \frac{1}{2}\big(g(0) + g(1)\big)$ und bestimmen Sie das zugehörige 2-stufige explizite Runge-Kutta-Verfahren mit Konsistenzordnung $p = 2$.

(b) Betrachten Sie die Simpson-Regel $I_2(g) = \frac{1}{6}\big(g(0) + 4g(\frac{1}{2}) + g(1)\big)$ und bestimmen Sie das zugehörige 3-stufige explizite Runge-Kutta-Verfahren mit Konsistenzordnung $p = 3$.

Aufgabe 9 (mündlich)

Betrachten Sie zu $f \in C([t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^M, \mathbb{R}^M)$ das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t))\,, \qquad u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^M\,,$$

und $Q \in \mathbb{R}^{M,M}$ sei eine reguläre Matrix. Zeigen Sie:

(a) Die Transformation $v(t) = Qu(t)$ führt obige Anfangswertaufgabe in folgendes Anfangswertproblem über:

$$\dot{v}(t) = Qf(t, Q^{-1}v(t))\,, \qquad v(t_0) = Qu_0 \in \mathbb{R}^M\,.$$

(b) Jedes explizite Runge-Kutta-Verfahren erhält diese Eigenschaft, d.h. Anwendung des Verfahrens auf die beiden Anfangswertprobleme liefert Approximationen u^n und v^n mit $v^n = Qu^n$.

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Donnerstag, den 12.11.2009, 8.00 Uhr** in den Einwurfkasten "Numerische Mathematik II" (im 1. Stock von Gebäudeteil C des Allianz-Gebäudes) einzuwerfen oder in der Übung abzugeben.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Homepage:
http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numa12009w/

Übungsbetrieb / Rechnerpraktikum:
Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern sowie Attestierung von Programmieraufgaben) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.