Numerische Mathematik II — Übungsblatt 5

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 13 (schriftlich – 4 Punkte)

Die Lösung der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = -\frac{1}{1+t}u(t)$ zum Anfangswert $u(0) = 1$ ist gegeben durch $u(t) = \frac{1}{1+t}$. Betrachten Sie die Näherungslösungen des expliziten Euler-Verfahren zum Zeitpunkt T mit Schrittweite $\tau = \frac{T}{N}$, d.h. $u^N \approx u(T)$.

(a) Zeigen Sie: $u^N = \dfrac{1-\tau}{1+T-\tau}$ für $\tau = \frac{T}{N}$, $N \in \mathbb{N}$.

(b) Bestimmen Sie den Wert $P(0)$ des Interpolationspolynoms $P = P_1 \in \mathcal{P}_1$ bzw. $P = P_2 \in \mathcal{P}_2$ zu den Wertetabellen

T	$T/2$
u^1	u^2

bzw.

T	$T/2$	$T/4$
u^1	u^2	u^4

.

(c) Berechnen Sie für $N \in \{1, 2, 4\}$ die Näherung des expliziten Euler-Verfahrens zum Zeitpunkt T. Nutzen Sie die Interpolationpolynome aus (b) um eine bessere Approximation $P(0) \approx u(T)$ zur Zeit T zu erhalten. Welche Größenordnung hat der Fehler $P(0) - u(T)$ in diesen Fällen?

Aufgabe 14 (schriftlich – 4 Punkte)

Betrachten Sie die Konstruktion der linearen Mehrschrittverfahren nach Adams-Bashforth, d.h. für $k \in \mathbb{N}$ Schritte sei

$$u^n = u^{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} P(t)\,dt\,,$$

wobei $P \in \mathcal{P}_{k-1}$ das Interpolationspolynom durch $f^{n-i} = f(t_{n-i}, u^{n-i})$, $i = 1, \dots, k$ ist. Konstruieren Sie die Adams-Bashforth-Verfahren explizit für $k = 1, \dots, 4$.

Aufgabe 15 (mündlich)

Betrachten Sie die explizite Mittelpunktsregel (als Zweischritt-Verfahren)

$$u^n = u^{n-2} + 2\tau f(t_{n-1}, u^{n-1})\,.$$

Zeigen Sie, dass sich die explizite Mittelpunktsregel mit den Identitäten

$$\widehat{\tau} = 2\tau\,, \qquad \widehat{t}_k = t_0 + k\widehat{\tau}\,, \qquad u^0 = v^0 = w^0\,,$$
$$v^k = u^{2k}\,, \qquad w^k = u^{2k+1} - \tau f(t_{2k}, u^{2k})\,,$$

als Einschrittverfahren

$$\begin{bmatrix} v^n \\ w^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^{n-1} \\ w^{n-1} \end{bmatrix} + \widehat{\tau} \begin{bmatrix} f\big(\widehat{t}_{n-1} + \frac{\widehat{\tau}}{2}, w^{n-1} + \frac{\widehat{\tau}}{2} f(\widehat{t}_{n-1}, v^{n-1})\big) \\ \frac{1}{2}\big(f(\widehat{t}_{n-1} + \widehat{\tau}, v^n) + f(\widehat{t}_{n-1}, v^{n-1})\big) \end{bmatrix}$$

schreiben lässt, und dass dieses Einschritt-Verfahren reversibel ist, d.h. für den diskreten Fluss $\phi_{\widehat{\tau}}$ gilt

$$\phi_{\widehat{\tau}}\big(t + \widehat{\tau}, -\widehat{\tau}, \phi_{\widehat{\tau}}(t, \widehat{\tau}, z)\big) = z\,.$$

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Donnerstag, den 26.11.2009, 8.00 Uhr** in den Einwurfkasten "Numerische Mathematik II" (im 1. Stock von Gebäudeteil C des Allianz-Gebäudes) einzuwerfen oder in der Übung abzugeben.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Homepage:
http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numa12009w/

Übungsbetrieb / Rechnerpraktikum:
Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern sowie Attestierung von Programmieraufgaben) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.