Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Numerische Mathematik II — Übungsblatt 7

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 20 (schriftlich – 4 Punkte)

Die rechte Seite $f \in C([t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^M, \mathbb{R}^M)$ des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \qquad u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^M,$$

erfülle eine Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante L und zudem gelte

$$\big(f(t,y) - f(t,z)\big)^T (y-z) \le 0 \qquad \text{für alle} \quad t \in [t_0, t_0+T] \text{ und } y, z \in \mathbb{R}^M.$$

Im impliziten Euler-Verfahren muss in jedem Schritt die nichtlineare Gleichung $u^n - u^{n-1} - \tau f(t_n, u^n) = 0$ gelöst werden. Zeigen Sie, dass für alle Schrittweiten $\tau > 0$, die Fixpunkt-Iteration

$$u^{n,j} = u^{n,j-1} - \theta\Big(u^{n,j-1} - u^{n-1} - \tau f\big(t_n, u^{n,j-1}\big)\Big), \qquad u^{n,0} = u^{n-1},$$

für hinreichend kleines $\theta > 0$ konvergiert. Bestimmen Sie ein optimales θ^* in Abhängigkeit von der Schrittweite τ und der Lipschitz-Konstanten L.

Aufgabe 21 (schriftlich – 4 Punkte)

Es seien die symmetrisch und positiv definiten Matrizen $M, A \in \mathbb{R}^{M,M}$ mit zugehörigen Normen $|u|_M = \sqrt{u^T M u}$ und $|u|_A = \sqrt{u^T A u}$ gegeben. Betrachten Sie die gewöhnliche Differentialgleichung

$$M\dot{u}(t) = -Au(t), \qquad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^M,$$

sowie ausgehend von $u^0 = u_0$ das implizite Euler-Verfahren $Mu^n = Mu^{n-1} - \tau A^n$ zur numerischen Approximation. Zeigen Sie:

(a) Die Lösung $u(t)$ erfüllt die a priori Abschätzung

$$|u(t)|_M \le \exp\left(-\frac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(M)} t\right) |u_0|_M$$

und falls $|u|_M \le |u|_A$ für alle $u \in \mathbb{R}^M$ gilt, dann gilt sogar $|u(t)|_M \le e^{-t}|u_0|_M$.

(b) Bei fester Schrittweite $\tau > 0$ gilt für die n-te Iterierte des impliziten Euler-Verfahrens

$$\left(1 + \tau\frac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(M)}\right)^n |u^n|_M \le |u_0|_M,$$

und falls wieder $|u|_M \le |u|_A$ gilt, folgt sogar $(1+\tau)^n |u^n|_M \le |u_0|_M$.

Aufgabe 22 (mündlich)

Betrachten Sie für $\theta \in [0,1]$ das Einschritt-Verfahren

$$u^n = u^{n-1} + \tau f\big((1-\theta)t_{n-1} + \theta t_n, (1-\theta)u^{n-1} + \theta u^n\big),$$

und wenden Sie dieses auf die skalare Testgleichung

$$\dot{u}(t) = -\lambda u(t), \qquad u(0) = 1,$$

mit $\mathrm{Re}(\lambda) \ge 0$ und Lösung $u(t) = e^{-\lambda t}$ an.

(a) Bestimmen Sie alle $\theta \in [0,1]$, sodass $|u^n| \le |u^{n-1}|$ unabhängig von τ und λ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass alle Iterierten die Form $u^n = R_\theta(-\lambda\tau)u^{n-1}$ mit einer rationalen Funktion $R_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ besitzen. Zeichnen Sie für $\theta \in \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ das Stabilitätsgebiet $S_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |R_\theta(z)| \le 1\}$.

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Donnerstag, den 10.12.2009, 8.00 Uhr** in den Einwurfkasten "Numerische Mathematik II" (im 1. Stock von Gebäudeteil C des Allianz-Gebäudes) einzuwerfen oder in der Übung abzugeben.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Homepage:

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numa12009w/

Übungsbetrieb / Rechnerpraktikum:

Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern sowie Attestierung von Programmieraufgaben) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.