Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Numerische Mathematik II — Übungsblatt 8

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 23 (mündlich)

Sei $R(z) = 1 + z + O(z^2)$ eine rationale Approximation der Exponentialfunktion mit reellen Koeffizienten und ohne Polstellen in $\mathbb{C}_-$. Zeigen Sie analog zur Vorlesung folgende Äquivalenz:

(a) $\mathbb{C}_- \subset S = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\}$, d.h. das durch R erzeugte Verfahren ist A-stabil.

(b) $|R(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Aufgabe 24 (schriftlich – 4 Punkte)

Zu $A \in \mathbb{R}^{M,M}$ ist die Exponentialfunktion durch $\exp(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Falls $AB = BA$ für $A, B \in \mathbb{R}^{M,M}$ gilt, so ist $\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B)$.

(b) Es gelten folgende Äquivalenzen:

(i) A ist schiefsymmetrisch, d.h. $A^T = -A$.

(ii) $\exp(tA)$ ist orthogonal, d.h. $\exp(tA)\exp(tA)^T = \exp(tA)^T \exp(tA) = I_M$.

(iii) Für alle $u_0 \in \mathbb{R}^M$ und $\dot{u}(t) = Au(t)$, $u(0) = u_0$ gilt $|u(t)| = |u_0|$.

Aufgabe 25 (schriftlich – 4 Punkte)

Betrachten Sie das diagonal implizite Runge-Kutta-Verfahren mit dem Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cc} \alpha & \alpha & \\ 1 & 1-\alpha & \alpha \\ \hline & 1-\alpha & \alpha \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie anhand der Konsistenzbedingungen für Runge-Kutta-Verfahren alle $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass das Verfahren die Konsistenzordnung $p = 2$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion $R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(c) Zeigen Sie, dass falls das Verfahren die Konsistenzordnung $p = 2$ besitzt, das Verfahren A- und L-stabil ist.

Hinweis: Für (c) können Sie das Ergebnis aus Aufgabe 23 benutzen.

Aufgabe 26 (schriftlich – 3 Punkte)

Das klassische 4-stufige Runge-Kutta-Verfahren hat die Stabilitätsfunktion

$$R(z) = 1 + z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{6}z^3 + \tfrac{1}{24}z^4 .$$

Zeigen Sie, dass das Stabilitätsgebiet dieses Verfahrens ein Intervall $[-i\theta, i\theta]$, $\theta \in \mathbb{R}$, der imaginären Achse enthält. Berechnen Sie den größtmöglichen Wert von θ.

Aufgabe 27 (Radau IA-Verfahren) (mündlich)

Betrachten Sie zur Lösung der AWA $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$, $u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^M$, das implizite Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{aligned} k_1 &= f\big(t_{n-1}, u^{n-1} + \tau(\tfrac{1}{4}k_1 - \tfrac{1}{4}k_2)\big) , \\ k_2 &= f\big(t_{n-1} + \tfrac{2}{3}\tau, u^{n-1} + \tau(\tfrac{1}{4}k_1 + \tfrac{5}{12}k_2)\big) , \\ u^n &= u^{n-1} + \tau\big(\tfrac{1}{4}k_1 + \tfrac{3}{4}k_2\big) . \end{aligned}$$

(a) Geben Sie das Butcher-Schema zu diesem Verfahren an.

(b) Zeigen Sie anhand der Konsistenzbedingungen, dass das Verfahren mindestens die Ordnung $p = 3$ hat.

(c) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion des Verfahrens.

(d) Zeigen Sie, dass das Verfahren A- und L-stabil ist.

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Donnerstag, den 17.12.2009, 8.00 Uhr** in den Einwurfkasten "Numerische Mathematik II" (im 1. Stock von Gebäudeteil C des Allianz-Gebäudes) einzuwerfen oder in der Übung abzugeben.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Homepage:

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numa12009w/

Übungsbetrieb / Rechnerpraktikum:

Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern sowie Attestierung von Programmieraufgaben) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.