Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Numerische Mathematik II — Übungsblatt 9

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 28 (schriftlich – 3 Punkte)
Gegeben sei die Differentialgleichung $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$.

(a) f habe die Form $f(t,u) = Au + g(t,u)$, wobei $A \in \mathbb{R}^{M,M}$ und $g \in C([t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^M, \mathbb{R}^M)$. Ferner sollen A und g bzgl. eines Skalarprodukts $(\cdot,\cdot)$ mit zugehöriger Norm $|y| = \sqrt{(y,y)}$ die Abschätzungen $(y, Ay) \le \nu |y|^2$ für $y \in \mathbb{R}^M$ bzw. $|g(t,y) - g(t,z)| \le L|y-z|$ für $t \in [t_0, t_0+T]$ und $y, z \in \mathbb{R}^M$ mit $L \ge 0$ erfüllen. Dabei ist $\nu \in \mathbb{R}$ und $L \ge 0$. Zeigen Sie, dass die AWA bzgl. dieser Norm dissipativ ist, falls $\nu + L \le 0$ gilt.

(b) Für $f(t,u) \equiv f(u)$ soll das einstufige Rosenbrock-Verfahren

$$(I_M - \alpha\tau J)k_1 = f(u^{n-1}), \qquad u^n = u^{n-1} + \tau k_1 .$$

mit $\alpha > 0$ und $J = f'(u^{n-1})$ benutzt werden. Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion des Verfahrens. Für welche $\alpha \in [0,1]$ ist das Verfahren A- bzw. L-stabil?

(c) Betrachten Sie nochmals das Verfahren aus Aufgabe 22 (Übungsblatt 7):

$$u^n = u^{n-1} + \tau f\big((1-\theta)t_{n-1} + \theta t_n, (1-\theta)u^{n-1} + \theta u^n\big)$$

mit $\theta \in [0,1]$. Für welche θ ist das Verfahren A-, L- bzw. B-stabil?

Aufgabe 29 (schriftlich – 4 Punkte)
Betrachten Sie das diagonal implizite Runge-Kutta-Verfahren mit zugehörigem Butcher-Schema. Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass das Verfahren algebraisch stabil und somit auch B-stabil ist. Zeigen Sie, dass es ein α^* gibt, sodass das Verfahren zusätzlich zur B-Stabilität auch noch die Konsistenzordnung $p = 3$ besitzt.

$$\begin{array}{c|cc} \alpha & \alpha & \\ 1-\alpha & 1-2\alpha & \alpha \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Aufgabe 30 (schriftlich – 3 Punkte)
Im Folgenden sei $H \in C^1(\mathbb{R}^M, \mathbb{R})$. Betrachten Sie das (autonome) Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = f(u(t))$, $u(0) = u^0$, und zeigen Sie:

(a) Sei $f(u) = -\nabla H(u)$ und $u(t)$ sei eine Lösung. Solange $u = u(t)$ kein stationärer Punkt von H ist (d.h. falls $\nabla H(u) \neq 0$), dann ist die Kurve $t \mapsto H(u(t))$ streng monoton fallend.

(b) Sei $J^{-1} \in \mathbb{R}^{M,M}$ schiefsymmetrisch und $f(u) = J^{-1}\nabla H(u)$. Dann gilt $t \mapsto H(u(t))$ ist konstant für Lösungen $u(t)$.

Aufgabe 31 (Symplektisches Euler-Verfahren) (mündlich)
Betrachten Sie zu der sogenannten Hamilton-Funktion $H \in C^2(\mathbb{R}^{2M}, \mathbb{R})$ das zugehörige Hamiltonsystem

$$\dot{p}(t) = -\partial_q H(p(t), q(t)), \qquad \dot{q}(t) = \partial_p H(p(t), q(t)),$$

bzw. $\dot{u}(t) = J^{-1}\nabla H(u(t))$ mit $u = (p^T, q^T)^T \in \mathbb{R}^{2M}$ und $J = \left[\begin{smallmatrix} 0 & I_M \\ -I_M & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2M,2M}$ heißt symplektisch falls $A^TJA = J$ gilt. Für den Fluss $\phi : [0,T] \times \mathbb{R}_{\ge 0} \times \mathbb{R}^{2M}$ eines Hamiltonsystems gilt, dass $\partial_z \phi(t, \tau, z) \in \mathbb{R}^{2M,2M}$ symplektisch ist. Betrachten Sie zur numerischen Approximation das (symplektische Euler-) Verfahren

$$p^n = p^{n-1} - \tau \partial_q H(p^n, q^{n-1}), \qquad q^n = q^{n-1} + \tau \partial_p H(p^n, q^{n-1}).$$

und zeigen Sie:

(a) Falls die Hamiltonfunktion separabel ist, d.h. es gibt $T, U \in C^2(\mathbb{R}^M, \mathbb{R})$ mit $H(p,q) = T(p) + U(q)$, dann ist das Verfahren explizit.

(b) Mithilfe des Satzes über die implizite Funktion lässt sich u^n anhand einer Funktion $S \in C^1(\mathbb{R}^{2M}, \mathbb{R}^{2M})$ als $u^n = S(u^{n-1})$ darstellen, und für die Ableitung $\frac{du^n}{du^{n-1}} = \frac{dS(u^{n-1})}{du^{n-1}}$ gilt:

$$\frac{du^n}{du^{n-1}} = \begin{bmatrix} I_M & 0 \\ -\tau\partial_{pp}H(p^n, q^{n-1}) & I_M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_M & -\tau\partial_{qq}H(p^n, q^{n-1}) \\ 0 & I_M \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2M,2M}.$$

(c) Zeigen Sie, dass $\frac{du^n}{du^{n-1}} \in \mathbb{R}^{2M,2M}$ symplektisch ist.

Termine: Die Vorlesung und Übung findet vor und nach Weihnachten wie gewohnt statt:

Datum	Uhrzeit	Veranstaltung
Di. 22. Dezember 2009	14.00 Uhr	Vorlesung
Do. 7. Januar 2010	8.00 Uhr	Übung

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Donnerstag, den 7.1.2010, 8.00 Uhr** in den Einwurfkasten "Numerische Mathematik II" (im 1. Stock von Gebäudeteil C des Allianz-Gebäudes) einzuwerfen oder in der Übung abzugeben.

Homepage:
http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numa12009w/

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.