Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Numerische Mathematik II — Übungsblatt 10

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 32 (Restringierte Mehrkörpersysteme) (schriftlich – 4 Punkte)

In Mehrkörpersystemen mit $n \in \mathbb{N}$ Körpern wird die Bewegung des n-ten Körpers durch seine Position $u^{(n)} : [0,T] \to \mathbb{R}^3$ und seine Geschwindigkeit $\dot{u}^{(n)}(t)$ beschrieben. Der n-te Körper habe das Gewicht m_n und auf ihn wirkt die Kraft $F^{(n)}$, die auch von den anderen Körpern des Systems abhängt. Nach dem zweiten Newton'schen Gesetz lässt sich die Bewegungsgleichung dann als $m_n \ddot{u}^{(n)}(t) = F^{(n)}$ schreiben. Setzt man $N = 3n$ und fasst man die Positionen bzw. Kräfte zusammen, so erhält man die AWA

$$M\ddot{u}(t) = F(t, u(t), \dot{u}(t))\,, \qquad u(0) = u_0\,, \quad \dot{u}(0) = v_0\,,$$

in $\mathbb{R}^N$ mit $M = \operatorname{diag}(m_i I_3)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{N,N}$ und $F : [0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Die Körper sollen sich nicht beliebig bewegen dürfen, sondern zusätzlich noch die algebraischen Nebenbedingungen $g(u(t)) = 0$ mit $g \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^p)$, $p < N$ erfüllen. Nach Einführung eines Lagrange-Multiplikators $\lambda : [0,T] \to \mathbb{R}^p$ führt dies auf das System

$$M\ddot{u}(t) = F(t, u(t), \dot{u}(t)) - g'(u(t))^T \lambda(t)\,, \qquad g(u(t)) = 0\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass zusätzlich zu $g(u(t)) = 0$ auch $g'(u(t))\dot{u}(t) = 0$ gelten muss.

(b) Zeigen Sie, dass $\lambda(t)$ eindeutig durch $u(t)$ bestimmt ist falls $\operatorname{Rang}\big(g'(u(t))\big) = p$.

(c) Nutzen Sie (b) um eine AWA für $u(t)$ ohne Nebenbedingungen herzuleiten.

(d) Wie sieht die Gleichung in (c) für $F(t,u,v) = -Ku$ und $g(u) = Cu - b$ mit $K \in \mathbb{R}^{N,N}$, $C \in \mathbb{R}^{p,N}$ und $b \in \mathbb{R}^p$ aus? Welches Verfahren würden Sie zur Lösung verwenden falls K symmetrisch und positiv definit ist? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 33 (schriftlich – 4 Punkte)

Betrachten Sie ein durch Kollokation erzeugtes implizites Runge-Kutta-Verfahrens mit Butcher-Schema $(\mathcal{A}, b, c)$ und zeigen Sie, dass die Koeffizienten die Bedingungen

$$\sum_{s=1}^{S} b_s c_s^{q-1} = \tfrac{1}{q}\,, \qquad q = 1, \ldots, S\,,$$

$$\sum_{s=1}^{S} a_{rs} c_s^{q-1} = \tfrac{c_r^q}{q}\,, \qquad r, q = 1, \ldots, S\,.$$

erfüllen, dass das Verfahren konsistent und invariant gegen Autonomisierung ist, und zudem die Quadraturformel $\sum_{s=1}^{S} b_s g(c_s) \approx \int_0^1 g(t)\,dt$ exakt für $P \in \mathcal{P}_{S-1}$ ist.

Aufgabe 34 (mündlich)

Sei $\Omega = (0,1)$, sowie $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \geq 0$. Betrachten Sie auf dem Interval $[0,T] \times (0,1)$ die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t u(t,x) = -a\partial_x u(t,x) + \varepsilon \partial_x^2 u(t,x)$$

mit periodischen Randbedingungen $u(t,0) = u(t,1)$ für $t \geq 0$ und Anfangswert $u(0,x) = u_0(x)$. Die partiellen Ableitungen bzgl. der Ortsvariablen $x \in \Omega$ sollen durch finite Differenzen auf dem Gitter $\Delta = \{x_m = mh : m = 0, \ldots, M+1\}$ mit $h = \frac{1}{M+1}$ approximiert werden, d.h. $u(t, x_m) \approx u_m(t)$. Aufgrund der periodischen Randbedingungen gilt dann $u_0(t) = u_{M+1}(t)$ und wir erhalten die AWA $\dot{u}(t) = Au(t)$ mit $A = -aB + \varepsilon C$, wobei $B, C \in \mathbb{R}^{M+1,M+1}$ gegeben sind durch

$$B = \frac{1}{2h}\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & -1 \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 0 & 1 \\ 1 & & & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für $p \in \{1, \ldots, M+1\}$ der Vektor $v^p \in \mathbb{R}^{M+1}$, $(v^p)_k = \exp(\mathrm{i}2\pi pkh)$ sowohl Eigenvektor von B als auch von C ist (dabei ist i die imaginäre Einheit und kein Index).

(b) Zeigen Sie, dass A die Eigenwerte $\lambda_p = -\mathrm{i}\frac{a}{h}\sin(2\pi ph) - \frac{2\varepsilon}{h^2}\big(1 - \cos(2\pi ph)\big)$ besitzt.

(c) Skizzieren Sie das Spektrum von A graphisch. Diskutieren Sie die Lage des Spektrums für verschiedene Ortsschrittweiten h und in Abhängigkeit des Parameters $\varepsilon \geq 0$. Bringen Sie die Lage des Spektrums mit dem Stabilitätsgebiet der θ-Methode aus Aufgabe 22 (Übungsblatt 7) in Verbindung.

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Donnerstag, den 14.1.2010, 8.00 Uhr** in den Einwurfkasten "Numerische Mathematik II" (im 1. Stock von Gebäudeteil C des Allianz-Gebäudes) einzuwerfen oder in der Übung abzugeben.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.