Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Numerische Mathematik II — Übungsblatt 11

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 35 (schriftlich – 4 Punkte)

Sei $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$ und betrachten Sie zu $B_a, B_b \in \mathbb{R}^{2,2}$, $g \in \mathbb{R}^2$ und $f \in C(I, \mathbb{R}^2)$ die inhomogene lineare Randwertaufgabe $u'(x) = Au(x) + f(x)$, $B_a u(0) + B_b u(1) = g$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda > 0 .$$

(a) Zeigen Sie, dass die Lösung der homogenen Differentialgleichung die Form

$$u(x) = c_1 \begin{bmatrix} \exp(\lambda x) \\ \exp(\lambda x) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \exp(-\lambda x) \\ -\exp(-\lambda x) \end{bmatrix},$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ besitzt, und dass $U(x) = \begin{bmatrix} \cosh(\lambda x) & \sinh(\lambda x) \\ \sinh(\lambda x) & \cosh(\lambda x) \end{bmatrix}$ ein Fundamentalsystem ist.

(b) Bestimmen Sie zu den Randwerten $u_1(0) = g_1$ und $u_1(1) = g_2$ die Matrizen B_a, B_b sowie die Matrix $Q = B_a + B_b U(1)$.

(c) Zeigen Sie, das die Kondition der Matrix Q von der Größenordnung $\exp(\lambda)$ ist. Interpretieren Sie dieses Ergebnis bzgl. der Stabilität des Schieß-Verfahrens, falls λ sehr groß ist.

Aufgabe 36 (mündlich)

(a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $u'(x) = u(x)^2$, $u(0) = v \in \mathbb{R}$ ein Singularität bei $t^* = v^{-1}$ besitzt.

(b) Betrachten Sie die Randwertaufgabe $u''(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in I = (0,1)$ sowie $u(0) = u(1) = 0$. Zeigen Sie, dass $u(x) = x\log(x)$ die RWA in I erfüllt, d.h. $u \in C^2(I, \mathbb{R})$, es aber keine Fortsetzungen $u'(0)$ und $u''(0)$ gibt.

(c) Interpretieren Sie die Sachverhalte in (a) und (b) bzgl. der Durchführbarkeit des Schieß-Verfahrens allgemein.

Aufgabe 37 (schriftlich – 4 Punkte)

Betrachten Sie die nichtlineare Randwertaufgabe

$$-u''(x) + \tfrac{1}{2}u(x)^2 = 0\,, \qquad u(0) = u_a\,, \quad u(1) = u_b\,.$$

(a) Transformieren Sie die Randwertaufgabe in eine äquivalente Gleichung mit homogenen Randbedingungen.

(b) Betrachten Sie die Anfangswertaufgabe

$$-u''(x) + \tfrac{1}{2}u(x)^2 = 0\,, \qquad u(0) = 0\,, \quad u'(0) = v\,,$$

mit der Lösung u^v und zeigen Sie, dass $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H(v) = u^v(1)$ stetig differenzierbar ist. Berechnen Sie auch die Ableitung $H'(v)$.

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Donnerstag, den 21.1.2010, 8.00 Uhr** in den Einwurfkasten "Numerische Mathematik II" (im 1. Stock von Gebäudeteil C des Allianz-Gebäudes) einzuwerfen oder in der Übung abzugeben.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.