Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Numerische Mathematik II — Übungsblatt 13

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 42 (schriftlich – 2 Punkte)

Betrachten Sie nochmals das Modellbeispiel $-u''(x) = f(x)$ mit den Randbedingungen $u(0) = u_a$ und $u(1) = u_b$ auf dem äquidistanten Gitter mit Schrittweite $h = \frac{1}{N+1}$ und Knoten $x_k = kh$, $k = 0, \dots, N+1$. Die zweite Ableitung soll durch die finite Differenz

$$u''(x_k) \approx \frac{1}{12h^2}\Big(- u(x_{k-2}) + 16u(x_{k-1}) - 30u(x_k) + 16u(x_{k+1}) - u(x_{k+2})\Big)$$

für $k = 2, \dots, N-1$ approximiert werden. An x_1 und x_N sollen die finite Differenzen

$$u''(x_1) \approx \frac{1}{12h^2}\Big(11u(x_0) - 20u(x_1) + 6u(x_2) + 4u(x_3) - u(x_4)\Big)\,,$$
$$u''(x_N) \approx \frac{1}{12h^2}\Big(- u(x_{N-3}) + 4u(x_{N-2}) + 6u(x_{N-1}) - 20u(x_N) + 11u(x_{N+1})\Big)\,.$$

benutzt werden. Stellen Sie das lineare Gleichungssystem $A_h u^h = f^h$ in $\mathbb{R}^N$ auf, das mit obigen Differenzenquotienten entsteht. Welche Bandbreite hat dabei die Matrix A_h? Ist diese Matrix diagonal-dominant und irreduzibel?

Aufgabe 43 (schriftlich - 5 Punkte)

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ sei regulär und es gelte $A[n,k] \le 0$ für $k \ne n$. Der diagonale Anteil von A sei mit $D = \operatorname{diag}(A[k,k])_{k=1,\dots,N}$ bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) Falls ein Vektor $z \in \mathbb{R}^N$, $z > 0$ (komponentenweise) mit $Az > 0$ (komponentenweise) existiert, so ist A eine M-Matrix, d.h. A besitzt strikt positive Diagonalelemente und für die Inverse gilt (komponentenweise) $A^{-1} \ge 0$. Zeigen Sie dazu nacheinander:

  (i) Die Matrix $J = D^{-1}(D-A)$ ist (komponentenweise) nicht-negativ und zudem gilt (komponentenweise) $Jz < z$.

  (ii) $|x|_z := \max_{k=1,\dots,N} \frac{|x_i|}{z_i}$ ist eine Vektornorm, und in der zugehörigen Matrixnorm $\|J\|_z = \sup_{|x|_z=1} |Jx|_z$ gilt die Abschätzung $\|J\|_z < 1$.

  (iii) Die Matrix $(I_N - J)$ ist regulär mit (komponentenweise) nicht-negativer Inverse und somit ist A eine M-Matrix.

(b) Es gilt die Abschätzung $\|A^{-1}\|_\infty \le \dfrac{|z|_\infty}{\min_k (Az)_k}$.

Aufgabe 44 (schriftlich – 3 Punkte)

Sei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = b$ ein Gitter und

$$V_h = \{u \in C[a,b] : u(a) = 0 \text{ und } u\big|_{[x_{k-1},x_k]} \text{ affin linear für alle } k = 1, \dots, N+1\}\,.$$

Zu $u \in V_h$ sei $u_k = u(x_k)$ für $k = 0, \dots, N+1$. Zeigen Sie, dass

$$\|u\|_h := \left(\sum_{k=1}^{N+1} \left(\frac{|u_k - u_{k-1}|}{x_k - x_{k-1}} \right)^2 \right)^{1/2} \quad \text{eine Norm in } V_h \text{ definiert.}$$

Aufgabe 45 (mündlich)

Zeigen Sie für hinreichend glatte Funktionen $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$\|u^2\|_\infty \le 2\|u\|\,\|u'\|\,.$$

Dabei ist $\|v\|_\infty = \sup_{x\in(a,b)} |v(x)|$ und $\|v\| = \Big(\int_a^b |v(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}$.

Aufgabe 46 (mündlich)

Zu $f \in C[a,b]$ und $p \in C^1[a,b]$ sei das Randwertproblem $Lu = f$ mit dem Differentialoperator

$$(Lu)(x) = -\tfrac{d}{dx}\big(p(x)u'(x)\big) + r(x)u(x)\,,$$

und den Randwerten $u(a) = u_a$ und $u(b) = u_b$ gegeben. Zur Schrittweite $h = \frac{b-a}{N+1}$ sei auf dem Gitter $x_k = a + kh$, $k = 0, \dots, N+1$ der diskrete Differentialoperator L_h gegeben durch

$$L_h u_k = -\frac{1}{h^2}\Big(p_{k-\frac12} u_{k-1} - (p_{k-\frac12} + p_{k+\frac12})u_k + p_{k+\frac12} u_{k+1}\Big) + r_k u_k\,,$$

wobei $u_k \approx u(x_k)$. Zudem ist $p_{k\pm\frac12} = p(x_{k\pm\frac12})$ sowie $r_k = r(x_k)$. Zeigen Sie, dass falls $p \in C^3[a,b]$ und $u \in C^4[a,b]$, die Finite-Differenzen-Diskretisierung konsistent von der Ordnung $p = 2$ ist, und für den Konsistenzfehler gilt:

$$\|L_h I_h u - f^h\|_{\infty,\Delta} \le \frac{1}{24} \max_{x\in[a,b]} \big\{|(pu')'''(x)| + |p'(x)u'''(x)| + 2|p(x)u''''(x)|\big\}\,.$$

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Donnerstag, den 4.2.2010, 8.00 Uhr** in den Einwurfkasten “Numerische Mathematik II” (im 1. Stock von Gebäudeteil C des Allianz-Gebäudes) einzuwerfen oder in der Übung abzugeben.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.

Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.