Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Numerische Mathematik II — Übungsblatt 14

Wintersemester 2009/2010

In allen Aufgaben sei jeweils $I = (a, b)$ und auf I sei ein Gitter $a = x_0 < \cdots < x_{N+1} = b$ mit Teilintervallen $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ und Schrittweiten $h_j = x_j - x_{j-1}$ gegeben.

Aufgabe 47 (Quadratische Formfunktionen) (mündlich)
Es seien zusätzlich die Punkte $x_{j-1/2} = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j) \in I_j$ für $j = 1, \dots, N+1$ definiert.

(a) Bestimmen Sie für jedes $j \in \{1, \dots, N+1\}$ die drei Polynome zweiten Grades $\psi_j^{-1}, \psi_j^{-1/2}, \psi_j^0 \in \mathcal{P}_2$, die folgende Eigenschaften erfüllen:

$$\text{Für } \; n, k \in \{-1, -1/2, 0\} \text{ gilt:} \quad \psi_j^n(x_{j+k}) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } n=k\,, \\ 0 & \text{, falls } n\neq k\,. \end{cases}$$

(b) Zeichnen Sie die Polynome für vier nebeneinander liegende Intervalle.

(c) Zeigen Sie $\psi_j^{-1}(x) + \psi_j^{-1/2}(x) + \psi_j^0(x) = 1$ für alle $x \in \bar{I}_j$.

(d) Konstruieren Sie eine Basis für $V_h = \{u \in C[a, b] : u\big|_{\bar{I}_j} \in \mathcal{P}_2, j = 1, \dots, N+1\}$.

(e) Zeigen Sie, dass es einen Interpolationsoperator $\widehat{I}_h : C[a, b] \to V_h$ gibt, sodass $\|u - I_h u\|_\infty \le C h^3 \|u'''\|_\infty$ für alle $u \in C^3[a, b]$ gilt.

Aufgabe 48 (mündlich)
Betrachten Sie die Diskretisierung mit linearen finiten Elementen und homogenen Randbedingungen, d.h.

$$V_h = \{u \in C[a, b] : u(a) = u(b) = 0\,,\; u\big|_{\bar{I}_j} \in \mathcal{P}_1 \text{ für alle } j = 1, \dots, N+1\}\,.$$

Eine Basis von V_h ist durch $\{\phi_n^h\}_{n=1,\dots,N}$ anhand der Forderung $\phi_n^h(x_k) = \delta_{kn}$ für $n = 1, \dots, N$ gegeben. Anstatt die Integrale in der schwachen Formulierung analytisch exakt zu berechnen, verwendet man oft Quadraturformeln, die die Integrale nur näherungsweise berechnen. Eine einfache Möglichkeit ist die zusammengesetzte Trapezregel, d.h. für eine integrierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei dann $\int_I f(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{N+1} \frac{h_j}{2}(f(x_{j-1}) + f(x_j))$. Zeigen Sie, dass die Matrix $M \in \mathbb{R}^{N,N}$, $M[k, n] = \int_I \phi_k^h(x)\phi_n^h(x)\,dx$ diagonal ist, falls das Integral durch die zusammengesetzte Trapezregel approximiert wird.

Aufgabe 49 (A posteriori Fehlerabschätzung) (mündlich)
Betrachten Sie auf $I = (a, b)$ zu gegebenem $f \in C[a, b]$ den Sturm-Liouville-Operator

$$Lu(x) = -\big(p(x)u'(x)\big)' + q(x)u'(x) + r(x)u(x)\,,$$

und die zugehörige RWA: $Lu(x) = f(x)$ und $u(a) = u(b) = 0$. Es sei $\hat{V} = \{\phi \in C[a, b] : \phi(a) = \phi(b) = 0,\ \phi \text{ stückweise differenzierbar}\}$ und zu $\tilde{I} \subset I$ sei $\|v\|_{\tilde{I}} = \Big(\int_{\tilde{I}} |v(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}$, sowie $\|\cdot\| := \|\cdot\|_I$ und das L^2-Skalarprodukt sei mit (u, v) bezeichnet. Die zur RWA gehörige Bilinearform

$$a(u, v) = \int_a^b p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u'(x)v(x) + r(x)u(x)v(x)\,dx$$

sei auf $\hat{V}$ stetig und elliptisch, d.h. es gibt Konstanten $c, C > 0$, sodass $|a(u, v)| \le C\|u'\|\,\|v'\|$ und $a(v, v) \ge c\|v'\|^2$ für alle $u, v \in \hat{V}$. Dann hat die RWA eine eindeutige Lösung $u \in \hat{V}$ und es gilt $a(u, \phi) = \ell(\phi)$ für alle $\phi \in \hat{V}$, wobei $\ell(\phi) = \int_I f(x)\phi(x)\,dx$.

Zu einem endlich dimensionalen Teilraum $V_h \subset \hat{V}$ ist die diskrete Approximation $u_h \in V_h$ charakterisiert durch $a(u_h, \phi_h) = \ell(\phi_h)$ für alle $\phi_h \in V_h$. Zudem existiere ein Interpolationsoperator $I_h : \hat{V} \to V_h$ mit der Eigenschaft $\|v - I_h v\|_{I_n} \le C_I h_n^k \|\frac{d^k}{dx^k} v\|_{I_n}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ mit einer von h_n unabhängigen Konstanten $C_I > 0$. Das zur RWA gehörige adjungierte Problem ist für festes $J : \hat{V} \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$\text{Finde } z \in \hat{V}: \quad a(\phi, z) = J(\phi) \qquad \text{für alle } \; \phi \in \hat{V}\,.$$

Die Lösung des adjungierten Problems sei mit $z \in \hat{V}$ bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) $a(u - u_h, z) = (f, z - z_h) - a(u_h, z - z_h)$ für alle $z_h \in V_h$.

(b) $a(u - u_h, z) = \sum_{j=1}^{N+1} \int_{I_j} \big(f(x) - Lu_h(x)\big)\big(z(x) - I_h z(x)\big)\,dx\,.$

(c) $|a(e, z)| \le \Big(\sum_{j=1}^{N+1} h_j^{2k}\|f - Lu_h\|_{I_j}^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j=1}^{N+1} h^{-2k}\|z - I_h z\|_{I_j}^2\Big)^{1/2}, \quad k \in \mathbb{N}.$

(d) Es gibt ein $\tilde{C} > 0$: $|a(e, z)| \le \tilde{C}\|\frac{d^k}{dx^k} z\|\Big(\sum_{j=1}^{N+1} h_j^{2k}\|f - Lu_h\|_{I_j}^2\Big)^{1/2}$.

(e) Wenden Sie (d) für $J(\phi) = \frac{a(\phi, u - u_h)}{\sqrt{a(u - u_h, u - u_h)}}$ und $k = 1$ an. Zeigen Sie, dass es ein $\widehat{C} > 0$ gibt mit: $\|(u - u_h)'\| \le \widehat{C} \sum_{j=1}^{N+1} h_j^2 \|f - Lu_h\|_{I_j}^2$.

Studienbegleitende Prüfung:
Nach Ende der Vorlesung kann eine studienbegleitende Prüfung **mündlich** abgelegt werden. Mögliche Termine sind Donnerstag, 25. Februar 2010, oder Montag, 12. April 2010. Eine Anmeldung erfolgt über den Übungsleiter.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.