1 Anfangswertaufgaben – Existenz und Eindeutigkeitssätze

(1.1) Sei $t_0 \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $G \subset \mathbb{R}^M$ Gebiet. Zu einem Anfangswert $u_0 \in G$ und $f \in C([t_0, t_0 + T] \times G, \mathbb{R}^M)$ suchen wir eine Lösung $u \in C^1([t_0, t_0 + T], G)$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= f\big(t, u(t)\big) \qquad t \in (t_0, t_0 + T) \\ u(t_0) &= u_0 \,. \end{aligned}$$

(1.2) Für $u \in C([t_0, t_0 + T], G)$ ist äquivalent:

a) $u \in C^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ und u löst AWA (1.1)

b) u löst die Integralgleichung $u(t) = u_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f\big(s, u(s)\big)\, ds$ für $t \in [t_0, t_0 + T]$

(1.3) Zu $r > 0$ mit $B_r(u_0) := \{z \in \mathbb{R}^M \colon |z - u_0| \le r\} \subset G$ setze

$$M_r := \max_{(t,z) \in [t_0, t_0 + T] \times B_r(u_0)} |f(t, z)| \,.$$

Dann gilt für jede Lösung u von (1.1)

$$|u(t) - u_0| \le (t - t_0) M_r \,, \qquad t \in [t_0, t_0 + \min\{T, \frac{r}{M_r}\}] \,.$$

Im Folgenden sei $T \le \frac{r}{M_r}$.

1 Anfangswertaufgaben – Existenz und Eindeutigkeitssätze

(1.4) Zu $N \in \mathbb{N}$, $t_n^N = t_0 + n\tau_N$, $\tau_N = \frac{T}{N}$ ist der *Eulersche Polygonzug* $u^N \in C([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ mit

$$u^N(t) = u^N(t_{n-1}^N) + (t - t_{n-1}^N) f\big(t_{n-1}^N, u^N(t_{n-1}^N)\big), \qquad t \in [t_{n-1}^N, t_n^N], \quad n = 1, \dots, N$$

wohldefiniert, und es gilt $|u^N(t) - u_0| \le (t - t_0) M_r$.

(1.5) $v \in C([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ ist Lipschitz-stetig, wenn $L > 0$ existiert mit

$$|v(s) - v(t)| \le L\,|s - t|, \qquad s, t \in [t_0, t_0 + T].$$

Die L-stetigen Funktionen bilden einen Banachraum $C^{0,1}([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ mit Norm $\|v\|_{C^{0,1}} = \max\Big\{\|v\|_\infty, \sup_{t_0 \le s < t \le t_0 + T} \frac{|v(s) - v(t)|}{|s - t|}\Big\}$.

(1.6) Jede beschränkte Folge $\{v^N : N \in \mathbb{N}\}$ in $C^{0,1}([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ besitzt eine konvergente Teilfolge $\{v^{N_k} : k \in \mathbb{N}\}$ in $C([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$, d. h. es existiert $v \in C([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ mit $\lim_{k \longrightarrow \infty} \|v^{N_k} - v\|_\infty = 0$.

(1.7) Die Folge $\{u^N : N \in \mathbb{N}\}$ aus (1.4) ist in $C^{0,1}([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ beschränkt. Sie besitzt eine konvergente Teilfolge, die gegen eine Lösung $u \in C^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ von (1.1) konvergiert.

1 Anfangswertaufgaben – Existenz und Eindeutigkeitssätze

(1.8) $f \in C([t_0, t_0 + T] \times G, \mathbb{R}^M)$ ist in der zweiten Komponente Lipschitz-stetig in G (erfüllt eine L-Bedingung), wenn $L > 0$ existiert mit

$$|f(t,y) - f(t,z)| \le L\,|y - z|\ , \qquad t \in [t_0, t_0 + T], \quad y, z \in G.$$

(1.9) Sei $f \in C^1([t_0, t_0 + T] \times \overline{G}, \mathbb{R}^M)$, $G \subset \mathbb{R}^M$ beschränkt und konvex. Dann erfüllt f eine L-Bedingung in G.

(1.10) Seien $u, v \in C^1([t_0, t_0 + T], G)$ Lösungen von $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ und $\dot{v}(t) = f(t, v(t))$.
Wenn f eine L-Bedingung erfüllt, dann gilt

$$|u(t) - v(t)| \le \exp(L(t - t_0))\ |u(t_0) - v(t_0)|\ , \qquad t \in [t_0, t_0 + T].$$

(1.11) Wenn f eine L-Bedingung erfüllt, dann existiert ein $T < 0$, so dass die AWA (1.1) eindeutig lösbar ist.

(1.12) Seien $w, a, b\colon [t_0, t_0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}_{\ge 0}$ stückweise stetig, $b(s) \le b(t)$ für $s < t$, und es gelte

$$w(t) \le \int_{t_0}^{t} a(s) w(s)\, ds + b(t), \qquad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Dann gilt

$$w(t) \le b(t)\ \exp\Big(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\Big), \qquad t \in [t_0, t_0 + T].$$