4 Steife Differentialgleichungen

(4.1) Die lineare AWA $\dot{u} = Au$, $u(0) = u_0$, heißt *stabil*, wenn für alle u_0

$$|u(t)| \leq C\,|u_0|$$

gilt, und *asymptotisch stabil*, wenn für alle u_0 gilt

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} |u(t)| = 0\,.$$

(4.2) Für lineare AWA hat ein Runge-Kutta-Verfahren die Form
$u^n = R(\tau_n A)u^{n-1}$ mit $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ und Polynomen $P, Q \in \mathbb{P}_S$.
Für explizite Verfahren ist R ein Polynom.
Wenn das Verfahren die Ordnung p hat, gilt: $R(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j!} z^j + O(z^{p+1})$.

(4.3) Ein Runge-Kutta-Verfahren heißt *A-stabil*, wenn die linke Halbebene $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C}\colon\, Re(z) \leq 0\} = \{z \in \mathbb{C}\colon\, |\exp(z)| \leq 1\}$ im Stabilitätsgebiet $S = \{z \in \mathbb{C}\colon\, |R(z)| \leq 1\}$ enthalten ist.

(4.4) Für A-stabile Runge-Kutta-Verfahren gilt: Wenn die lineare AWA stabil ist, dann ist auch die numerische Lösung $u^n = R(\tau A)^n u^0$ stabil mit $|u^n| \leq C\,|u^0|$ für alle Schrittweiten $\tau > 0$.

4 Steife Differentialgleichungen

(4.5) Ein A-stabiles Runge-Kutta-Verfahren heißt *L-stabil*, wenn für die rationale Funktion $R(\infty) = \lim\limits_{|z|\to\infty} R(z) = 0$ gilt.

(4.6) Sei $\begin{array}{c|c} c & \mathscr{A} \\ \hline & b^T \end{array}$ ein A-stabiles Runge-Kutta-Verfahren mit $a_{Sr} = b_r$, $r = 1, \ldots, S$, und sei $\mathscr{A}$ invertierbar. Dann ist das Verfahren L-stabil.

(4.7) $A \in \mathbb{R}^{M,M}$ ist genau dann schiefsymmetrisch (d. h. $A^T = -A$), wenn $\exp(tA)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ orthogonal ist, d. h. $\exp(tA)\exp(tA)^T = I_M$.

(4.8) Ein Runge-Kutta-Verfahren heißt *reversibel*, wenn $R(z)\,R(-z) \equiv 1$.

(4.9) Sei R rationale Funktion zu einem Runge-Kutta-Verfahren mit $R(z) = 1 + z + O(z^2)$, und R habe keine Polstelle in $\mathbb{C}_-$. Dann ist äquivalent:
a) $S = \{z \in \mathbb{C} \colon |R(z)| \le 1\} = \mathbb{C}_-$
b) $|R(z)| = 1$ für $\Re(z) = 0$
c) $R(z)\,R(-z) \equiv 1$

(4.10) Sei $A^T = -A$ schiefsymmetrisch und sei R rationale Funktion eines Runge-Kutta-Verfahrens mit $S = \mathbb{C}_-$.
Dann gilt: $R(\tau A)$ ist orthogonal und $|u^n| = |u^{n-1}|$ für $u^n = R(\tau A)u^{n-1}$.

4 Steife Differentialgleichungen

(4.12) Eine Funktion $f \in C([t_0, t_0 + T] \times G, \mathbb{R}^M)$ heißt *monoton*, wenn bzgl. einem Skalarprodukt $(\ ,\ )$

$$\big(f(t,z) - f(t,y), z - y\big) \geq 0 \qquad t \in [t_0, t_0 + T], \quad z, y \in G.$$

gilt.

(4.11) Eine AWA $\dot{u}(t) = f\big((t, u(t)\big)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ heißt dissipativ, wenn $-f$ monoton ist. Dann gilt für eine weitere Lösung $\dot{v}(t) = f\big((t, v(t)\big)$

$$|u(t) - v(t) \leq |u(t_0) - v(t_0)|, \qquad t \in [t_0, t_0 + T].$$

(4.12) Ein Einschrittverfahren ψ heißt *B-stabil*, wenn für dissipative AWA

$$|u^n - v^n| \leq |u^{n-1} - v^{n-1}|$$

mit $u^n = u^{n-1} + \tau_n \psi(t_{n-1}, \tau_n, u^{n-1})$ und $v^n = v^{n-1} + \tau_n \psi(t_{n-1}, \tau_n, v^{n-1})$ gilt.

(4.13) B-stabile Runge-Kutta-Verfahren sind A-stabil.

(4.14) Ein Runge-Kutta-Verfahren heißt algebraisch stabil, wenn
a) $M := \mathrm{diag}(b_s)\mathscr{A} + \mathscr{A}^T \mathrm{diag}(b_s) - bb^T$ positiv semidefinit
b) $b_s \geq 0$

(4.15) Algebraisch stabile Runge-Kutta-Verfahren sind B-stabil.

4 Steife Differentialgleichungen

(4.16) Zu Stützstellen $0 \le c_1 < c_2 < \cdots < c_S \le 1$ definieren wir ein *Kollokationsverfahren* durch:
Wähle Polynom $P \in \mathbb{P}_S$ mit $P(t_{n-1}) = u^{n-1}$ und

$$\frac{d}{dt} P(t_{n,s}) = f(t_n, P(t_{n,s})) \quad \text{für} \quad t_{n,s} = t_{n-1} + c_s \tau_n\,, \qquad s = 1, \dots, S$$

und setze (falls die Interpolationsaufgabe lösbar ist) $u^n = P(t_n)$.

(4.17) Das Kollokationsverfahren ist ein Runge-Kutta-Verfahren mit

$$b_s = \int_0^1 L_s(t)dt \;\text{ und }\; a_{sr} = \int_0^{c_s} L_r(t)dt \;\text{ für }\; L_s(t) = \prod_{\substack{r=1\\ r\neq s}}^{S} \frac{t - c_r}{c_s - c_r}.$$

(4.18) Wenn die Quadratur (c_s, b_s) die Ordnung p hat, dann hat auch das Kollokationsverfahren die Ordnung p. Für die Gauß-Quadratur gilt $p = 2S$.

(4.19) Die Kollokationsverfahren zur Gauß- und Radau-Quadratur sind B-stabil.

(4.20) Das Kollokationsverfahren zur Gauß-Quadratur ist reversibel.

4 Steife Differentialgleichungen – DAE-Systeme

(4.21) Sei $F \in C(I \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $I = [t_0, t_0 + T]$. Dann heißt: $F\big(t, u(t), \dot{u}(t)\big) = 0$, $t \in I, u(t_0) = u_0$ eine implizit gestellte AWA. $F(t, u, \dot{u}) = 0$ heißt differentiell-algebraisches System (DAE), wenn $D_3 F(t, u, \dot{u})$ entlang der Lösung nicht regulär ist. Der (differentielle) Index ist die kleinste Zahl k, sodass $\dot{u}$ in Abhängigkeit von u durch $\left(\frac{d}{dt}\right)^j F(t, u, \dot{u}) = 0$ bestimmt ist.

(4.22) Sei f, g stetig differenzierbar und $D_3 g(t_0, u_0, v_0)$ invertierbar. Betrachte

$$\dot{u} = f(t, u, v), \qquad 0 = g(t, u, v), \qquad u(t_0) = u_0,\ v(t_0) = v_0,\ g(t, u_0, v_0) = 0\ .$$

Dann existiert $T > 0$, sodass die DAE in $[t_0, t_0 + T]$ eindeutig lösbar ist.

(4.23) Sei $\begin{array}{c|c} c & \mathscr{A} \\ \hline & b^T \end{array}$ ein Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung p mit $a_{Sr} = b_r$ und

$$\begin{pmatrix} u^n \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{n-1} \\ v^{n-1} \end{pmatrix} + \tau \sum_{s=1}^{S} b_s \begin{pmatrix} k_s \\ \ell_s \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} k_s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_{n,s}, u^{n,s}, v^{n,s}) \\ g(t_{n,s}, u^{n,s}, v^{n,s}) \end{pmatrix}$$

Dann gilt $\big|(u^n, v^n) - (u(t_n), v(t_n))\big| = O(\tau^p)$.

(4.24) Sei $\mathscr{A}$ invertierbar, so konvergiert die Runge-Kutta-Lösung zu

$$\dot{u}^\varepsilon = f(t, u^\varepsilon, v^\varepsilon), \quad \varepsilon \dot{v}^\varepsilon = g(t, u^\varepsilon, v^\varepsilon), \quad u^\varepsilon(t_0) = u_0,\ v^\varepsilon(t_0) = v_0,\ g(t, u_0, v_0) = 0$$

für $\varepsilon \longrightarrow 0$ gegen die Lösung von (4.22).