Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Numerische Mathematik II — Programmier-Übungsblatt 2

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 3 **(Abgabe)**

Implementieren Sie das eingebettete Runge-Kutta-Verfahren RK$4(3)$ mit dem erweiterten Butcher-Schema

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & & \\
1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & 0 & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

aus der Vorlesung. Der Fehlerschätzer hat für dieses spezielle Verfahren die Form $\eta = \frac{1}{6}(k_4 - k_5)$. Testen Sie ihr Programm für die Fehlertoleranz $\varepsilon = 2^{-k}$, $k = 1, \dots, 16$, und dem Dämpfungsfaktor $\theta = \frac{1}{2}$ mit folgendem Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$, $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^4$ auf dem Zeitintervall $[0, 5]$:

$$
u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix}, \qquad f(t,z) = \begin{bmatrix} c_1 z_1 z_2 - (c_2 + c_3) z_1 \\ -c_1 z_1 z_2 - c_4 z_2 \\ c_2 z_1 \\ c_3 z_1 + c_4 z_2 \end{bmatrix}, \qquad u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 99 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

und $c_1 = 0.1$, $c_2 = 0.3$, $c_3 = 0.7$, $c_4 = 0$.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Schreiben Sie eine Funktion `function f = udot(t,z)`, welche die Funktion $f(t, z)$ auswertet.

(b) Schreiben Sie eine Funktion `function [t,u] = erk(tau,u0,epsilon)`, die das eingebettete Runge-Kutta-Verfahren implementiert. Rückgabewerte sind dabei die erhaltenen diskreten Zeitpunkte t_n, sowie die numerischen Approximationen u^n zu diesen Zeitpunkten. Eingabewerte sind die Anfangsschrittweite τ, der Anfangswert u_0, sowie die Fehlertoleranz ε.

(c) Erstellen Sie eine Tabelle, die die Anzahl der Schritte in Abhängigkeit von ε anzeigt. Welchen Zusammenhang finden Sie zwischen der Anzahl der Schritte und der vorgegebenen Toleranz ε?

(d) Zeichnen Sie die Approximationen für u_i wie auch die erhaltenen Schrittweiten. Die exakte Lösung hat die Eigenschaft $e^T u(t) = e^T u_0$ und $u_i(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, T]$ (warum?). Überprüfen Sie, inwieweit die numerische Approximation diese Eigenschaft erhält. Finden Sie zudem eine Toleranz $\varepsilon > 0$, sowie Parameter c_i, sodass u^n eine negative Komponente besitzt.

Interpretation des Anfangswertproblems

Dies ist ein Modell für eine Seuchenausbreitung in einer Population. Die einzelnen Komponenten von u_i und die Parameter c_i repräsentieren dabei:

$u_1(t)$	Infizierte Individuen (in %),	c_1	Ansteckungsrate,
$u_2(t)$	Empfängliche Individuen (in %),	c_2	Sterberate,
$u_3(t)$	Getötete Individuen (in %),	c_3	Heilungs-/Immunisierungsrate,
$u_4(t)$	Immunisierte Individuen (in %),	c_4	Impfungsrate.

Experimentieren Sie auch etwas mit den Parametern c_i und interpretieren Sie die Näherungslösungen aus Aufgabenteil (d).

Attestierung:

Die mit **(Abgabe)** markierten Aufgaben können Sie sich bis einschließlich **Donnerstag, den 26. November 2009** im Rechnerpraktikum attestieren lassen. Das Rechnerpraktikum findet immer **donnerstags, von 13.30 - 16.30 Uhr im B-Pool** des Rechenzentrums statt.

Service/Material:

Unter http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numa12009w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungs- und Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Übungsbetrieb / Rechnerpraktikum:

Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern sowie Attestierung von Programmieraufgaben) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.