Numerische Mathematik II — Programmier-Übungsblatt 3

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 4 (Rosenbrock-Verfahren für steife Differentialgleichungen) (**Abgabe**)

Betrachten Sie zur Lösung der autonomen Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = f\big(u(t)\big)\,, \qquad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^M\,.$$

das Rosenbrock-Verfahren

$$\begin{aligned} (I - \tau a J)k_1 &= f\big(u^{n-1}\big)\,, \\ (I - \tau a J)k_2 &= f\big(u^{n-1} + \tfrac{1}{2}\tau k_1\big) - \tau d_{21} J k_1\,, \\ u^n &= u^{n-1} + \tau k_2\,, \end{aligned}$$

mit $a = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$ und $d_{21} = a$, sowie $J \in \mathbb{R}^{M,M}$.

(a) Betrachten Sie die skalare Testgleichung $\dot{u}(t) = -u(t)$, $u(0) = 1$ mit Lösung $u(t) = e^{-t}$. Überprüfen Sie numerisch die von der Wahl von J unabhängige quadratische Konvergenz des Verfahrens für $\tau \to 0$. Welches Verfahren erhalten Sie für $J = 0$?

(b) Um ein stabiles Verfahren mit adaptiver Schrittweitensteuerung zu erhalten wird obiges Verfahren um eine weitere Stufe und ein zugehöriges Kontrollverfahren erweitert (eingebettetes Rosenbrock-Verfahren). Zudem wird ein Fehlerschätzer η eingeführt:

$$\begin{aligned} (I - \tau a J)k_3 &= f(u^n) - \tau\big(d_{31} J k_1 + d_{32} J k_2\big)\,, \\ \widehat{u}^n &= u^{n-1} + \tfrac{\tau}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)\,, \\ \eta &= \tfrac{1}{6}(-k_1 + 2k_3 - k_3)\,, \end{aligned}$$

mit $d_{31} = -(4+\sqrt{2})a$ und $d_{32} = (6+\sqrt{2})a$. Die Matrix J sei nun in jedem Zeitschritt durch $J = f'(u^{n-1})$ bestimmt. Implementieren Sie dieses Verfahren analog zum eingebetteten Runge-Kutta-Verfahren 4(3) von Programmierübungsblatt 2. Die neue Schrittweite soll zu vorgegebener Toleranz $\varepsilon > 0$ gemäß

$$\tau_{n+1} = \min\Big\{1.01, \theta\sqrt{\tfrac{\varepsilon}{|\eta|}}\Big\}\,\tau_n$$

mit Dämpfungsfaktor $\theta \in (0,1)$ bestimmt werden. Implementieren Sie das Verfahren so, dass pro Zeitschritt lediglich eine LU-Zerlegung durchgeführt werden muss (benutzen Sie dazu die Matlab Funktion `lu`) und so wenig Funktionsauswertungen wie nötig gemacht werden. Schreiben Sie dazu in Analogie zu Aufgabenblatt 2 folgende Funktionen:

- `[t,u] = rosenbrock(tau,u0,epsilon)` zur Implementierung des Verfahrens. Dabei sei `tau` die Anfangsschrittweite, `u0` der Anfangswert und `epsilon` die zur Schrittweitensteuerung vorgegebene Toleranz ε.
- `f = udot(t,z)` zur Berechnung der rechten Seite f.
- `J = Jac(t,z)` zur Berechnung der Jacobi-Matrix f'.

Testen Sie das Verfahren auf dem Zeitintervall $[0, 360]$ anhand von

$$f(u) = \begin{bmatrix} A(u_2 + u_1(1 - Bu_1 - u_2)) \\ \frac{1}{A}(u_3 - (1 + u_1)u_2) \\ C(u_1 - u_3) \end{bmatrix}\,, \qquad u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\,,$$

mit $A = 77.27$, $C = 0.161$ und $B = 8.375 \cdot 10^{-k}$, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Wenden Sie auch das explizite Runge-Kutta-Verfahren 4(3) aus dem vorigen Aufgabenblatt auf dieses Beispiel an. Für welche Parameter ist dieses Verfahren noch anwendbar?

Attestierung:

Die mit **(Abgabe)** markierten Aufgaben können Sie sich bis einschließlich **Donnerstag, den 17. Dezember 2009** im Rechnerpraktikum attestieren lassen. Das Rechnerpraktikum findet immer **donnerstags, von 13.30 - 16.30 Uhr im B-Pool** des Rechenzentrums statt.

Service/Material:

Unter http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numa12009w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungs- und Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Übungsbetrieb / Rechnerpraktikum:

Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern sowie Attestierung von Programmieraufgaben) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.