

Numerische Mathematik 1 Wintersemester 2010/2011

5. Programmierübungsblatt vom 19. Januar 2011

Schreiben Sie ein Programm, welches zu gegebener positiv definiter Tridiagonalmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit dem vorkonditionierten cg-Verfahren löst. Sei B der Vorkonditionierer. Dann lautet der Algorithmus:

```

 $r^0 = b - Au^0; p^0 = Br^0; \rho_1 = \langle p^0, r^0 \rangle_2; k = 0;$ 
while ( $r^k \neq 0$ )
     $a^k = Ap^k; \alpha_k = \frac{\rho_k}{\langle a^k, p^k \rangle_2};$ 
     $u^{k+1} = u^k + \alpha_k p^k;$ 
     $r^{k+1} = r^k - \alpha_k a^k;$ 
     $v^{k+1} = Br^{k+1}; \rho_{k+1} = \langle v^{k+1}, r^{k+1} \rangle_2;$ 
     $p^{k+1} = v^{k+1} + \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} p^k;$ 
end;
```

Wählen Sie zur Vorkonditionierung das symmetrische Gauß-Seidel-Verfahren, d.h. die Matrix

$$B = (D - L^t)^{-1} D (D - L)^{-1}$$

mit $D = \text{diag}(A)$ und der unteren Dreiecksmatrix L aus der Zerlegung $A = D - L - L^t$. Implementieren Sie diesen Vorkonditionierer als "skaliertes" Vorwärts- bzw. Rückwärtseinsetzen. Verwenden Sie den Startwert $u^0 = 0$. Brechen Sie die Iteration ab, sobald das Residuum

$$\|r^m\|_2 \leq \tau \|b\|_2 \quad \text{mit} \quad \tau = 10^{-5}$$

erfüllt.

Implementieren Sie zu Vergleichszwecken auch das cg-Verfahren ohne Vorkonditionierung, d.h. $B = I$.

Testen Sie beide Methoden mit der Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{falls } i = j, \\ -1 & \text{falls } |i - j| = 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und dem Vektor $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$, $b_i = \sin(i^2)$, für $n = 1000 \cdot 2^l$, $l = 0, 1, 2, 3, 4$. Geben Sie jeweils die Anzahl der benötigten Iterationsschritte sowie die Norm des Residuums nach dem letzten Iterationsschritt aus.

Vermeiden Sie bei der Programmierung die Verwendung von Matrizen als Datenstrukturen, bevorzugen Sie Vektoren.

Die bearbeiteten Programmieraufgaben geben Sie in der Programmierbetreuung (mittwochs von 14:00 bis 17:00 Uhr im A-Pool des Rechenzentrums) ab, führen Ihr Programm vor und erläutern dies. Die Abgabe ist bis spätestens **Mittwoch, den 26. Januar 2011** möglich.