Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Andreas Rieder
Dipl.-Math. techn. T. Kreutzmann
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Fakultät für Mathematik

Numerische Mathematik 1
Wintersemester 2010/2011

6. Tutorium (Woche vom 17. bis 21. Januar 2011)

Aufgabe 1:
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{Lösung:} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}).$$

Führen Sie ausgehend von dem Startvektor $x^0 = (0,0,0)^t$ drei Iterationsschritte des Gesamtschrittverfahrens und zwei Schritte des Einzelschrittverfahrens aus.

Aufgabe 2:
Beweisen Sie folgende Aussage des Satzes 2.4.5:
Ist A^t diagonaldominant, dann konvergiert das Gesamtschrittverfahren zur Lösung von $Ax = b$.
Zeigen Sie hierzu, dass die Ähnlichkeitstransformation

$$M_A^J = A^{-1}(M_{A^t}^J)^t A$$

gilt, wobei M_B^J die Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahren bezüglich der Matrix B bezeichnet. Folgern Sie dann aus diesem Zusammenhang die Behauptung.

Aufgabe 3:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit und $D = \operatorname{diag}(A)$. Zeigen Sie: Wenn $2D - A$ positiv definit ist, dann konvergiert das Jacobi-Verfahren

$$x^{k+1} = x^k + D^{-1}(b - Ax^k)$$

in der Euklidischen Norm. Finden Sie eine Matrix, die diesen Voraussetzungen genügt und für die

$$\|I - D^{-1}A\|_2 > 1$$

gilt.

Aufgabe 4:
Beweisen Sie Lemma 2.4.9 aus der Vorlesung.
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit. Für $x, b \in \mathbb{R}^n$ gilt die Äquivalenz

$$Ax = b \iff x \text{ ist eindeutig bestimmtes minimierendes Argument von } \Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \Phi(\xi) = \frac{1}{2}\langle A\xi, \xi\rangle_2 - \langle b, \xi\rangle_2 = \frac{1}{2}\xi^t A\xi - \xi^t b,$$

d.h. $x = \arg\min\{\Phi(\xi) \mid \xi \in \mathbb{R}^n\}$.