Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Andreas Rieder
Dipl.-Math. techn. T. Kreutzmann
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Fakultät für Mathematik

Numerische Mathematik 1
Wintersemester 2010/2011

7. Tutorium (Woche vom 31. Januar bis 04. Februar 2011)

Aufgabe 1:
Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ injektiv und $b \in \mathbb{R}^m$.
Zum Lösen des linearen Ausgleichproblems

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

kann das iterative Verfahren cgls (***c**onjugate **g**radient method for linear **l**east **s**quares problems*) herangezogen werden. Der Algorithmus dieser Methode mit Startwert x^0 lautet:

$r^0 = b - Ax^0$; $s^0 = A^t r^0$; $p^0 = s^0$; $k = 0$;
while $(r^k \neq 0)$
$$a^k = Ap^k;$$
$$\alpha_k = \frac{\|s^k\|_2^2}{\|a^k\|_2^2};$$
$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k;$$
$$r^{k+1} = r^k - \alpha_k a^k;$$
$$s^{k+1} = A^t r^k;$$
$$\beta_k = \frac{\|s^{k+1}\|_2^2}{\|s^k\|_2^2};$$
$$p^{k+1} = s^{k+1} + \beta_k p^k;$$
$$k = k + 1;$$
end;

Weisen Sie nach, dass dieses Verfahren äquivalent zu dem cg-Verfahren angewandt auf die Normalengleichung ist. Argumentieren Sie ferner, warum eine Umformulierung in diese Form sinnvoll ist.

Aufgabe 2:
Sei $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ die Folge der cg-Iterierten zur Lösung von $Ax = b$ mit Startwert x^0 und $\{y^k\} \subset \mathbb{R}^n$ die Folge der cg-Iterierten zur Lösung von $Ax = b$ mit Startwert $y^0 = x^i$ für ein $i \in \mathbb{N}$. (Beachte: Zur Vereinfachung der Notation setzen wir die Folge der cg-Iterierten nach Abbruch der Iteration konstant fort.)
Ist die Aussage

$$y^k = x^{i+k} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

im Allgemeinen richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Bitte wenden!

Aufgabe 3:

(a) Zeigen Sie: Um beim cg-Verfahren den Fehler in der Energienorm um einen Faktor ε zu reduzieren, d.h.

$$\|e^m\|_A = \|x - x^m\|_A \leq \varepsilon \|e^0\|_A,$$

benötigt man höchstens m cg-Iterationen, wobei m die kleinste ganze Zahl ist mit

$$m \geq \frac{1}{2}\sqrt{\kappa_2(A)}\ln(2/\varepsilon).$$

Hinweis: Für $a > 1$ gilt

$$\ln\Big(\frac{a+1}{a-1}\Big) > \frac{2}{a}.$$

(b) Das cg-Verfahren werde auf eine positiv definite Matrix A angewandt. Es ist lediglich bekannt, dass $\|e^0\|_A = 1$ und $\|e^{10}\|_A = 2^{-9}$ ist. Berechnen Sie aus diesen Informationen eine untere Schranke für $\kappa_2(A)$ und überprüfen Sie damit die Ungleichung aus (a).

Aufgabe 4:

Sei $H_k \in \mathbb{R}^{(k+1)\times k}$ die obere Hessenberg-Matrix, die im k-ten GMRES-Schritt auftritt. Und sei $H_k = Q_k R_k$ eine QR-Zerlegung von H_k.

Zeigen Sie, dass eine Givens-Rotation $G \in \mathbb{R}^{(k+2)\times(k+2)}$ genügt, um aus Q_k und R_k eine QR-Faktorisierung von H_{k+1} zu gewinnen.