Karlsruher Institut für Technologie

**Prof. Dr. Andreas Rieder**
**Dipl.-Math. techn. T. Kreutzmann**
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Fakultät für Mathematik

# Numerische Mathematik 1
# Wintersemester 2010/2011

## 6. Übungsblatt vom 13. Januar 2011

**Aufgabe 1:** (Vergleich Konvergenzeigenschaften)
Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$. Zeigen Sie:

(a) Für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

konvergiert das Jacobi-Verfahren, aber nicht die Gauß-Seidel-Iteration.

(b) Für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

konvergiert das Gauß-Seidel-Verfahren, aber nicht die Jacobi-Iteration.

**Aufgabe 2:** (symmetrisches Iterationsverfahren)
Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und regulär sowie $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Betrachten Sie für $k = 0, 1, 2, \dots$ die Iteration

$$\begin{aligned} x^{k+1/2} &= x^k + N(b - Ax^k), \\ x^{k+1} &= x^{k+1/2} + N^t(b - Ax^{k+1/2}). \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass (1) einer Iteration

$$x^{k+1} = x^k + \widehat{N}(b - Ax^k) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

mit symmetrischen $\widehat{N}$ entspricht, indem Sie $\widehat{N}$ bestimmen.

(b) Sei $A$ sogar positiv definit. Geben Sie für die Wahl $N = (D - L)^{-1}$, wobei $D = \mathrm{diag}(A)$ und $L$ strikte untere Dreiecksmatrix mit $A = D - L - L^t$ ist, die Matrix $\widehat{N}$ für (2) an. Weisen Sie ferner nach, dass $\widehat{N}$ positiv definit ist.

**Aufgabe 3:** (Iterative Verfahren für Blocksysteme)
Betrachten Sie zur Lösung des folgenden Blocksystems

$$\begin{pmatrix} A_1 & B \\ B & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

die beiden Methoden

(a) $A_1 x^{k+1} + By^k = b_1, \quad Bx^k + A_2 y^{k+1} = b_2;$

(b) $A_1 x^{k+1} + By^k = b_1, \quad Bx^{k+1} + A_2 y^{k+1} = b_2.$

Finden Sie hinreichende Bedingungen für die Konvergenz beider Schemata bei beliebeiger Wahl der Anfangswerte $x^0, y^0$.

**Aufgabe 4:** (vorkonditioniertes Gradientenverfahren)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n$. Darüber hinaus sei der positiv definite Vorkonditionierer $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Zum Lösen des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ betrachten wir das vorkonditionierte Gradientenverfahren:

$$\begin{aligned} z^k &= Pr^k = P(b - Ax^k), \\ \alpha_k &= \alpha_{\mathsf{opt}}(x^k, z^k) = \frac{\langle z^k, r^k\rangle_2}{\langle Az^k, z^k\rangle_2}, \\ x^{k+1} &= x^k + \alpha_k z^k. \end{aligned}$$

(a) Weisen Sie die Identität

$$\frac{\|e^k\|_A^2 - \|e^{k+1}\|_A^2}{\|e^k\|_A^2} = \frac{\langle z^k, z^k\rangle_{P^{-1}}^2}{\langle PAz^k, z^k\rangle_{P^{-1}}\langle (PA)^{-1}z^k, z^k\rangle_{P^{-1}}}$$

nach, wobei

$$e^k = x^k - x, \quad x = A^{-1}b,$$

den Fehler nach dem $k$-ten Schritt beschreibt.

(b) Verwenden Sie Teil (a) sowie die folgende Kantorovich-Ungleichung

$$\frac{\langle PAw, w\rangle_{P^{-1}}\langle (PA)^{-1}w, w\rangle_{P^{-1}}}{\|w\|_{P^{-1}}^4} \le \frac{(\eta_{\max} + \eta_{\min})^2}{4\eta_{\max}\eta_{\min}},$$

um die Fehlerabschätzung

$$\|e^{k+1}\|_A \le \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)\|e^k\|_A \le \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)^k \|e^0\|_A \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{|\eta_{\max}|}{|\eta_{\min}|}$$

zu zeigen. Dabei bezeichnen $\eta_{\min}$ und $\eta_{\max}$ den minimalen bzw. maximalen Eigenwert von $PA$.

Anmerkung: $\|\cdot\|_A$ bezeichnet die Energienorm definiert durch $\|v\|_A^2 = \langle v, Av\rangle_2$.

---

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Donnerstag, den 27. Januar 2011, 13.30 Uhr** in den mit „Numerische Mathematik I“ gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes (Kaiserstr. 93) ein. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (A-D).