

**Numerische Mathematik 1  
Wintersemester 2010/2011**

**7. Übungsblatt vom 27. Januar 2011**

**Aufgabe 1:**

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit dem cg-Verfahren. Wählen Sie als Startvektor  $x^0 = (0, 0)^t$ .

**Aufgabe 2:**

Sei  $x^k$  die  $k$ -te Iterierte des cg-Verfahrens angewandt auf das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$ . Zeigen Sie, dass die Iteration unabhängig von der Wahl des zugrundeliegenden orthonormalen Koordinatensystems ist. Das heißt: Sei  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthogonal sowie

$$\tilde{A} = VAV^t, \quad \tilde{b} = Vb \quad \text{und} \quad \tilde{x} = Vx.$$

Dann gilt zwischen  $x^k$  und der  $k$ -ten Iterierten  $\tilde{x}^k$  des cg-Verfahrens mit Startvektor  $\tilde{x}^0 = Vx^0$  angewandt auf das System  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$  der Zusammenhang

$$\tilde{x}^k = Vx^k.$$

**Aufgabe 3:**

Gegeben seien eine positiv definite Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit Eigenvektoren  $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$  und ein Vektor  $b \in \mathbb{R}^n$  mit

$$b = \sum_{j=1}^k \gamma_j v_j, \quad \gamma_j \in \mathbb{R}, \quad \text{und} \quad k \leq n.$$

Zeigen Sie:

Das cg-Verfahren zur Lösung von  $Ax = b$  liefert mit  $x^0 = 0$  nach höchstens  $k$  Schritten das exakte Ergebnis.

**Aufgabe 4:**

Das GMRES-Verfahren werde zur Lösung des Gleichungssystems  $Ax = b$  mit dem Startwert  $x^0 = 0$  angewandt. Dabei sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  positiv definit,  $b \in \mathbb{R}^n$  sowie  $x^m$  die  $m$ -te Iterierte und  $r^m = b - Ax^m$  das zugehörige Residuum. Zeigen Sie:

- Sei  $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Wird  $A$  durch  $\sigma A$  und  $b$  durch  $\sigma b$  ersetzt, dann ändern sich die Residuen zu  $\sigma r^m$ .
- Sei  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  unitär. Wird  $A$  durch  $UAU^t$  und  $b$  durch  $Ub$  ersetzt, dann ändern sich die Residuen zu  $Ur^m$ .

---

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Donnerstag, den 10. Februar 2011, 13.30 Uhr** in den mit „Numerische Mathematik I“ gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes (Kaiserstr. 93) ein. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (A-D).