Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Andreas Rieder
Dipl.-Math. techn. T. Kreutzmann
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Fakultät für Mathematik

Numerische Mathematik 1
Wintersemester 2010/2011

8. Übungsblatt vom 10. Februar 2011

Aufgabe 1:
Gegeben seien $n+1$ Knoten $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ im Intervall $[a,b]$, das die Null enthalte, sowie die zugehörigen Lagrange-Basisfunktionen $L_{n,j}$, $j = 0,\ldots,n$. Ferner sei $c_j = L_{n,j}(0)$. Zeigen Sie:

$$\sum_{j=0}^{n} c_j t_j^k = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = 0, \\ 0, & \text{falls } k = 1,\ldots,n, \\ (-1)^n t_0 t_1 \cdots t_n, & \text{falls } k = n+1. \end{cases}$$

Aufgabe 2:
Entscheiden Sie, ob folgende Interpolationsaufgaben lösbar bzw. eindeutig lösbar sind:

(a) Finde $P \in \Pi_3$ mit $P(0) = 1,\ P(1) = 1,\ P'(1) = 1$ und $P''(0) = 0$.

(b) Finde $Q \in \Pi_2$ mit $Q(0) = 1,\ Q'(0) = 1$ und $\int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Aufgabe 3:
Die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei beliebig oft differenzierbar und alle Ableitungen seien gleichmäßig beschränkt, d.h. es existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$\left| \left(\frac{d}{dx}\right)^k f(t) \right| \leq C \quad \text{für alle } t \in [a,b] \text{ und } k \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass für jede Folge von Knoten $\{t_0^{(n)},\ldots,t_n^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a,b]$ die Folge der Interpolationspolynome $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[a,b]} |P_n(t) - f(t)| = 0.$$

Aufgabe 4:
Sei $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ eine Knotenverteilung im Intervall $I = [a,b]$. Für eine stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist der stetig interpolierende Linienzug $\mathcal{I}g$ definiert durch die zwei Eigenschaften

1. $\mathcal{I}g(t_i) = g(t_i)$ für $i = 0,\ldots,n$,
2. $\mathcal{I}g|_{[t_i,t_{i+1}]}$ ist ein Polynom ersten Grades für $i = 0,\ldots,n-1$.

Zeigen Sie: Für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion g gilt

$$\|g - \mathcal{I}g\|_\infty \leq \frac{h^2}{8}\|g''\|_\infty,$$

wobei $h = \max_{0\leq i\leq n-1}(t_{i+1} - t_i)$ der Gitterweitenparameter und $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$ die Supremumsnorm ist.

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Donnerstag, den 24. Februar 2011, 13.30 Uhr** in den mit „Numerische Mathematik I“ gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes (Kaiserstr. 93) ein. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (A-D).