# 1 Einführendes Beispiel: Die euklidische Approximation

Sei $V$ ein reeller euklidischer Vektorraum. Das Skalarprodukt in $V$ wird mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ und die Norm mit $\|\cdot\|_V$ bezeichnet.

**(1.1) Problem**
*Sei $v \in V$, und sei $V_N \subset V$ ein endlich-dimensionaler Teilraum der Dimension $N$.*
*Bestimme $v_N^* \in V$ mit*

$$\|v - v_N^*\|_V = \min_{v_N \in V_N} \|v - v_N\|_V \,.$$

Im Folgenden sei $\{\phi_n\}_{n=1,\dots,N}$ eine Basis von $V_N$. Zunächst benötigen wir ein Hilfsresultat.

**(1.2) Lemma**
*Die Matrix*

$$A = \Big(\langle \phi_m, \phi_n\rangle_V\Big)_{m,n=1,\dots,N} \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

*ist symmetrisch und positiv definit.*

*Beweis.* Die Symmetrie der Matrix folgt aus der Symmetrie des Skalarprodukts.
Sei $y \in \mathbb{R}^N$, $y \neq 0$. Zeige $y^T A y > 0$.
Da $y \neq 0$ ist, gilt auch $\sum\limits_{n=1}^{N} y[n]\phi_n \neq 0$, denn die Basisvektoren $\{\phi_n\}$ sind linear unabhängig.
Also gilt $\|\sum_{n=1}^N y[n]\phi_n\|_V > 0$ und somit

$$\begin{aligned} y^T A y &= \sum_{m=1}^{N} y[m] \sum_{n=1}^{N} y[n] \langle \phi_m, \phi_n\rangle_V \\ &= \sum_{m=1}^{N} y[m] \Big\langle \phi_m, \sum_{n=1}^{N} y[n]\phi_n \Big\rangle_V \\ &= \Big\langle \sum_{m=1}^{N} y[m]\phi_m, \sum_{n=1}^{N} y[n]\phi_n \Big\rangle_V = \Big\| \sum_{n=1}^{N} y[n]\phi_n \Big\|_V^2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

□

**(1.3) Satz**
*Problem (1.1) ist eindeutig lösbar. Es gilt*

$$v_N^* = \sum_{n=1}^{N} x[n]^* \phi_n \,,$$

*wobei $x^* \in \mathbb{R}^N$ die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems*

$$A x^* = b$$

*mit $b = \Big(\langle v, \phi_m\rangle_V\Big)_{m=1,\dots,N} \in \mathbb{R}^N$ ist.*

*Beweis.* Definiere $f(x) = \frac{1}{2}\left\|v - \sum_{n=1}^N x[n]\phi_n\right\|_V^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
2f(x) &= \left\langle v - \sum_{m=1}^N x[m]\phi_m, v - \sum_{n=1}^N x[n]\phi_n \right\rangle_V \\
&= \langle v, v\rangle_V - \sum_{m=1}^N x[m]\langle \phi_m, v\rangle_V - \sum_{n=1}^N x[n]\langle v, \phi_n\rangle_V + \sum_{m=1}^N x[m] \sum_{n=1}^N x[n]\langle \phi_m, \phi_n\rangle_V \\
&= \langle v, v\rangle_V - 2x^T b + x^T A x\,.
\end{aligned}$$

Also ist $f$ beliebig oft stetig differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x[n]} x &= e_n \qquad (n\text{-ter Einheitsvektor in } \mathbb{R}^N), \\
\frac{\partial}{\partial x[n]} f(x) &= -(e_n)^T b + \frac{1}{2}(e_n)^T A x + \frac{1}{2} x^T A e_n = (e_n)^T (Ax - b)\,, \\
\frac{\partial^2}{\partial x[m]\partial x[n]} f(x) &= \frac{1}{2}(e_n)^T A e_m + \frac{1}{2}(e_m)^T A e_n = (e_m)^T A e_n \\
&= \frac{1}{2}(e_n)^T (A + A^T) e_m = (e_m)^T A e_n\,,
\end{aligned}$$

denn $A$ ist symmetrisch. Die kritischen Stellen von $f(\cdot)$ sind durch

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad \iff \quad Ax^* - b = 0\,,$$

charakterisiert. Also ist $x^* = A^{-1}b$ die einzige kritische Stelle. Da die Hessematrix

$$\nabla^2 f(x^*) = A$$

positiv definit ist (Lemma (1.2)), ist die kritische Stelle ein Minimum, und das Minimum ist eindeutig.

□

**Bemerkung**
*Analoge Aussagen gelten, wenn $V_N$ durch eine konvexe und abgeschlossene Menge ersetzt wird.*