6 Iterative Lösungsverfahren für nichtlineare Gleichungssysteme

Wir untersuchen in diesem Kapitel das *Newton-Verfahren*. Sei dazu $F\colon D \to \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar für eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^N$. Für eine Nullstelle $x^* \in D$ von F und $x^0 \in D$ gilt dann:

$$0_N = F(x^*) = F(x^0) + J_F(x^0)(x^* - x^0) + R_F(x^*, x^0)$$

mit $\frac{|R_F(x^*,x^0)|}{|x^*-x^0|} \to 0$ für $x^0 \to x^*$. Falls $0_N \approx F(x^0) + J_F(x^0)(x^* - x^0)$ gilt und falls $J_F(x^0)$ regulär ist, folgt $-J_F(x^0)^{-1}F(x^0) \approx x^* - x^0$, d. h. $x^* \approx x^0 - J_F(x^0)^{-1}F(x^0) =: \phi(x^0)$ mit $\phi(x) = x - J_F(x)^{-1}F(x)$.
Insbesondere ist x^* ein Fixpunkt von $\phi(x) := x - J_F(x)^{-1}F(x)$. Das entsprechende Fixpunkt-Verfahren ist die Newton-Iteration $x^{k+1} = \phi(x^k)$.

Bemerkung

1. *Die Konvergenz, bzw. Lösung, des Newtonverfahrens hängt vom Startwert x^0 ab.*
2. *Das Newtonverfahren konvergiert im allgemeinen nur lokal, d. h. x^0 muss nahe bei der Nullstelle x^* liegen.*

(Approximatives) Newtonverfahren
Sei $F : D \to \mathbb{R}^N$ mit $D \subset \mathbb{R}^N$ gegeben.

- *S0) Wähle $x^0 \in D$, $\varepsilon > 0$, setze $k = 0$*
- *S1) Falls $|F(x^k)| < \varepsilon$: STOP (Konvergenz)*
- *S2) Wähle $B_k \approx J_F(x^k)$ und löse $B_k d^k = -F(x^k)$*
- *S3) Setze $x^{k+1} = x^k + d^k$.*
  Falls $x^{k+1} \notin D$: STOP (Divergenz)
- *S4) Setze $k := k+1$, gehe zu S1)*

(6.1) Satz
Sei $D \subset \mathbb{R}^N$ konvex, $F : D \to \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar, $x^* \in D$ Nullstelle von F und $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Falls $\rho(I_N - BJ_F(x^*)) < 1$, dann konvergiert die Fixpunktiteration $x^{k+1} = \phi(x^k)$, mit $\phi(x) = x - BF(x)$, linear gegen x^*, d. h. es existiert ein $q \in (0,1)$ mit

$$|x^k - x^*| \le q^k |x^0 - x^*|\,.$$

(6.2) Satz (Banachscher Fixpunktsatz)
Sei $D \subset \mathbb{R}^N$ konvex und $\phi : D \to D$ kontrahierend, d. h. es existiert $q \in (0,1)$ mit

$$|\phi(z) - \phi(y)| \le q|z - y| \qquad \text{für } y,z \in D\,.$$

Dann gilt für alle $x^0 \in D$ und $x^{k+1} = \phi(x^k)$, $k = 0,1,\ldots$:

1. *$\{x^k\}$ ist Cauchyfolge mit Grenzwert $x^* \in \bar{D}$ und x^* ist der einzige Fixpunkt von ϕ in D*

2. $|x^k - x^*| \le \frac{q^k}{1-q}|x^1 - x^0|$

3. $|x^k - x^*| \le \frac{q}{1-q}|x^k - x^{k-1}|$

Beweis. Zu 1. Für $k,n \ge 1$ gilt:

$$|x^{k+n} - x^k| = \left|\sum_{j=1}^{n} x^{k+j} - x^{k+j-1}\right| \le \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|x^{k+j} - x^{k+j-1}|}_{\le q|x^{k+j-1} - x^{k+j-2}|}$$
$$\le \sum_{j=1}^{n} q^{j-1+k}|x^1 - x^0| \le q^k|x^1 - x^0| \sum_{j=1}^{\infty} q^j = \frac{q^k}{1-q}|x^1 - x^0|\,.$$

$\{x^k\}$ ist also eine Cauchyfolge in D; es existiert $x^* = \lim_{k\to\infty} x^k \in \bar{D}$ und es gilt

$$\phi(x^*) = \phi\left(\lim_{k\to\infty} x^k\right) = \lim_{k\to\infty} \phi(x^k) = \lim_{k\to\infty} x^{k+1} = x^*$$

x^* ist eindeutig. Sei dazu $x^{**} \in D$ mit $\phi(x^{**}) = x^{**}$. Dann gilt

$$|x^* - x^{**}| = |\phi(x^*) - \phi(x^{**})| \le q|x^* - x^{**}|$$

Es folgt $x^* = x^{**}$.
Zu 2. und 3. Es gilt

$$|x^* - x^k| = \left|\sum_{n=k}^{\infty} x^{n+1} - x^n\right| \le \sum_{n=k}^{\infty} |x^{n+1} - x^n| \le |x^k - x^{k-1}| \sum_{n=k}^{\infty} q^{n-k+1} = |x^k - x^{k-1}|\frac{q}{1-q}$$
$$\le q^{k-1}|x^1 - x^0|\frac{q}{1-q}\,.$$

□

Beweis. (Beweis von 6.1) Es gilt: J_F ist stetig, es existiert also ein $\delta > 0$ mit

$$\|BJ_F(x) - BJ_F(x^*)\| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad x \in D_0 = \{z \in D : |z - x^*| \le \delta\}\,.$$

(i) Zeige: $\phi(x) = x - BF(x)$ ist kontrahierend mit $q = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.
Zu $y,z \in D_0$ definiere $\varphi(t) = F((1-t)z + ty)$; es gilt $\varphi'(t) = J_F((1-t)z+ty)(y-z)$.
Weiter gilt

$$F(y) - F(z) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt = \int_0^1 J_F((1-t)z+ty)(y-z)\,dt\,.$$

Es folgt

$$\phi(y) - \phi(z) = (y-z) - B(F(y) - F(z)) = \int_0^1 (I_N - BJ_F((1-t)z+ty))(y-z)dt$$

und damit

$$|\phi(y) - \phi(z)| \le \int_0^1 \|I_N - BJ_F(\overbrace{(1-t)z+ty}^{=:w})\||y-z|dt \le q|y-z|\,,$$

denn es gilt die Abschätzung

$$\|I_N - BJ_F(w)\| \le \underbrace{\|I_N - BJ_F(x^*)\|}_{\le 1-\varepsilon} + \underbrace{\|BJ_F(x^*) - BJ_F(w)\|}_{\le \frac{\varepsilon}{2}} \le 1 - \frac{\varepsilon}{2} = q\,.$$

(ii) Zeige: Aus $x \in D_0$ folgt $\phi(x) \in D_0$.
Es ist $F(x^*) = 0_N$; es folgt $\phi(x^*) = x^*$ und $|\phi(x) - x^*| = |\phi(x) - \phi(x^*)| \le q|x - x^*| \le \delta$.
Damit folgt $\phi(x) \in D_0$.

$\square$

(6.3) Lemma
Sei $P(t) = \alpha - \beta t + \frac{\gamma}{2}t^2$ *mit* $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $\beta^2 - 2\alpha\gamma > 0$. *Dann gilt:*
Das Newtonverfahren mit $t_0 = 0$, $t_{k+1} = t_k - P'(t_k)^{-1}P(t_k)$ *konvergiert quadratisch gegen die kleinste Nullstelle* t^* *von* P *mit*

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} = t_k + \frac{\gamma}{2}\frac{(t_k - t_{k-1})^2}{\beta - \gamma t_k} < t^* \quad \textit{und}$$
$$|t_{k+1} - t^*| < \frac{2}{\gamma}\frac{1}{\beta - \gamma t^*}|t_k - t^*|^2$$

Beweis. Es ist $t_1 = t_0 - P'(t_0)^{-1}P(t_0) = 0 + \beta^{-1}\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \le \frac{2\alpha}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\alpha\gamma}} = t^*$. Weiter gilt $P'(t) = -\beta + \gamma t$, also $P'(t_1) < P'(t^*) < 0$.
Zeige induktiv: $t_{k+1} < t^*$ (also $P'(t_{k+1}) < 0$).
Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen. Betrachte den Schritt $k \to k+1$. Es gilt

$$t_k = t_{k-1} - \frac{\alpha - \beta t_{k-1} + \frac{\gamma}{2}t_{k-1}^2}{-\beta + \gamma t_{k-1}}$$

also $(t_k - t_{k-1})(\beta - \gamma t_{k-1}) = \alpha - \beta t_{k-1} + \frac{\gamma}{2}t_{k-1}^2$. Es ergibt sich

$$\frac{\gamma}{2}t_k^2 - \gamma t_k t_{k-1} + \frac{\gamma}{2}t_{k-1}^2 = \alpha - \beta t_k + \frac{\gamma}{2}t_k^2,$$

also $\frac{\gamma}{2}(t_k - t_{k-1})^2 = P(t_k)$. Damit folgt

$$t_{k+1} = t_k - \frac{P(t_k)}{P'(t_k)} = t_k + \frac{\gamma}{2}\frac{(t_k - t_{k-1})^2}{\beta - \gamma t_k}.$$

Zeige nun: $t_{k+1} < t^*$. Es gilt

$$\begin{aligned} P'(t_k)(t^* - t_{k+1}) &= P'(t_k)(t^* - t_k) + P(t_k) - P(t^*) \\ &= \int_{t_k}^{t^*} \big(P'(t_k) - P'(s)\big)\,ds = \int_{t_k}^{t^*}\int_s^{t_k} \underbrace{P''(u)}_{\equiv\gamma}\,du ds \quad = \int_{t_k}^{t^*} \gamma(s - t_k)ds \\ &= \frac{\gamma}{2}(t^* - t_k)^2 \end{aligned}$$

Aus $P'(t_k) < 0$ folgt damit $t^* - t_{k+1} < 0$. Also gilt auch

$$|t^* - t_{k+1}| \le \frac{1}{|P'(t_k)|}\frac{\gamma}{2}|t^* - t_k|^2 \le \frac{1}{|P'(t^*)|}\frac{\gamma}{2}|t^* - t_k|^2\,.$$

$\square$

(6.4) Satz (Satz von Newton-Kantorovich)
Sei $D \subset \mathbb{R}^N$ offen, $F: D \to \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar und $x^0 \in D$. Gelten für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ die Bedingungen

a) $|F(x^0)| \leq \alpha$,

b) $|J_F(x^0)y| \geq \beta |y| \quad \forall y \in \mathbb{R}^N$,

c) $\bar{U} := \bar{U}(x^0, \frac{2\alpha}{\beta}) = \left\{ z \in \mathbb{R}^N : |z - x^0| \leq \frac{2\alpha}{\beta} \right\} \subset D$,

d) $\|J_F(y) - J_F(z)\| \leq \gamma |y - z| \quad \forall y, z \in \bar{U}$,

e) $2\alpha\gamma < \beta^2$

dann ist das Newtonverfahren $x^{k+1} = x^k - J_F(x^k)^{-1} F(x^k)$ wohldefiniert und konvergiert quadratisch gegen eine Nullstelle $x^* \in \bar{U}$ von F mit

$$|x^* - x^0| \leq \frac{2\alpha}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\alpha\gamma}}.$$

Beweis. Idee: Wähle $P(t) = \alpha - \beta t - \frac{\gamma}{2} t^2$ und definiere $t_0 = 0$, $t_{k+1} = t_k - \frac{P(t_k)}{P'(t_k)}$ und zeige

f) $|J_F(x^k)y| \geq (\beta - t_k y)|\gamma| \quad \forall y \in \mathbb{R}^N$

g) $|x^{k+1} - x^k| \leq t_{k+1} - t_k$

Dann folgt aus f), dass $J_F(x^k)$ ist regulär ist und damit ist x^{k+1} wohldefiniert.
(i) Zeige für $y, z \in \bar{U}$: $|F(y) - F(z) - J_F(z)(y - z)| \leq \frac{\gamma}{2} |y - z|^2$.
Es gilt $\varphi(\lambda) = F((1-\lambda)z + \lambda y)$, $\lambda \in (0,1)$, also $\varphi'(\lambda) = J_F((1-\lambda)z - \lambda y)(y - z)$.
Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} F(y) - F(z) - J_F(z)(y-z) = \varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0) &= \int_0^1 \big(\varphi'(\lambda) - \varphi'(0)\big) d\lambda \\ &= \int_0^1 (J_F((1-\lambda)z + \lambda y) - J_F(z))(y - z) d\lambda \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} |F(y) - F(z) - J_F(z)(y-z)| &\leq \int_0^1 \|J_F((1-\lambda)z + \lambda y) - J_F(z)\| |y - z| d\lambda \\ &\overset{d)}{\leq} \int_0^1 \gamma |(1-\lambda)z + \lambda y - z| |y - z| d\lambda \\ &\leq \int_0^1 \gamma\lambda |y - z|^2 d\lambda = \frac{\gamma}{2} |y - z|^2 \end{aligned}$$

(ii) Zeige f) und g) induktiv.
$k = 0$: Zu f): Das ist gerade Aussage b).
Zu g): Es gilt $|x^1 - x^0| = |\underbrace{J_F(x^0)^{-1} F(x^0)}_{=:y}| \overset{b)}{\leq} \frac{1}{\beta} |F(x^0)| \overset{a)}{\leq} \frac{\alpha}{\beta} = t_1 - t_0$.

Induktionsschritt zu g): Es gilt

$$\begin{aligned}
\left|x^{k+1}-x^k\right| &\overset{f)}{\leq} \frac{1}{\beta-\gamma t_k}|F(x^k)| \\
&= \frac{1}{\beta-\gamma t_k}|F(x^k)\underbrace{-F(x^{k-1})-J_F(x^{k-1})(x^k-x^{k-1})}_{=0}| \\
&\overset{(i)}{\leq} \frac{1}{\beta-\gamma t_k}\frac{\gamma}{2}\left|x^k-x^{k-1}\right|^2 \overset{g)}{\leq} \frac{\gamma}{2}\frac{(t_k-t_{k-1})^2}{\beta-\gamma t_k} = t_{k+1}-t_k\,.
\end{aligned}$$

Induktionsschritt zu f): Es gilt

$$\begin{aligned}
(\beta-\gamma t_k)|y| &\leq \left|J_F(x^k)y\right| = \left|\Big(J_F(x^k)-J_F(x^{k+1})-J_F(x^{k+1})\Big)\,y\right| \\
&\leq \left\|J_F(x^k)-J_F(x^{k+1})\right\|\,|y| + \left|J_F(x^{k+1})y\right| \\
&\overset{d)}{\leq} \gamma\left|x^k-x^{k+1}\right|\,|y| + \left|J_F(x^{k+1})y\right| \\
&\overset{g)}{\leq} \gamma(t_{k+1}-t_k)|y| + \left|J_F(x^{k+1})y\right|
\end{aligned}$$

(iii) Zeige: $\{x^k\}$ ist eine Cauchyfolge. Es gilt

$$\left|x^{k+n}-x^k\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{n} x^{k+j}-x^{k+j-1}\right| \leq \sum_{j=1}^{n}\left|x^{k+j}-x^{k+j-1}\right| \overset{g)}{\leq} \sum_{j=1}^{n} t_{k+j}-t_{k+j-1} \leq |t_{k+n}-t_k|$$

Da $\{t_k\}$ eine Cauchyfolge ist (vgl. Lemma 6.3), gilt dies auch für $\{x^k\}$. Insbesondere existiert also $x^* \in \bar{U}$ mit $x^* = \lim_{k\to\infty} x^k$. Weiterhin gilt $\left|x^k-x^0\right| \leq t_k - t_0 = t_k$. Damit folgt schließlich

$$\lim_{k\to\infty}\left|x^k-x^0\right| = \left|x^*-x^0\right| \leq t_k = \frac{2\alpha}{\beta+\sqrt{\beta^2-2\alpha\gamma}}\,.$$

□

Zusatz x^* ist die einzige Nullstelle von F mit

$$|x-x^*| < 2\left|t^*-\frac{\beta}{\gamma}\right| = t^{**}-t^*\,.$$

Dabei ist t^{**} die zweite Nullstelle des Vergleichspolynoms.
Aus f) folgt

$$\begin{aligned}
(\beta-\gamma t^*)\,|x-x^*| &\leq |-J_F\,(x^*)\,(x-x^*)| \\
&\leq |F(x)-F(x^*)-J_F(x^*)\,(x-x^*)| + |F(x)| \leq \frac{\gamma}{2}|x-x^*|^2 + |F(x)|
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$|F(x)| \geq |x-x^*|\left(\beta-\gamma t^*-\frac{\gamma}{2}|x-x^*|\right),$$

d. h. es gilt $|F(x)| > 0$ für

$$\beta - \gamma t^* - \frac{\gamma}{2}|x - x^*| > 0 \quad \Longrightarrow \quad |x - x^*| < \frac{1}{\gamma}(\beta - \gamma t^*)\,.$$

Bemerkung

1. *Der Satz von Newton-Kantorovich beweist die Existenz einer Nullstelle*
2. *Für alle Eigenwerte λ von $J_F(x^0)$ gilt $|\lambda| \geq \beta$, d. h. $J_F(x^0)$ ist regulär.*
3. *Aus d) folgt, daß J_F lokal Lipschitz stetig ist.*

Beispiel

1. ***Wurzelberechnung im Taschenrechner***
   Sei $c = 2^p a$ mit $a \in (0.5, 1]$, d. h.

$$\sqrt{c} = \begin{cases} 2^m\sqrt{a} & p = 2m \\ 2^m\sqrt{2}\sqrt{a} & p = 2m+1 \end{cases}$$

   Es genügt also die Berechnung von $\sqrt{a}$, $a \in (0.5, 1]$ ($\sqrt{2}$ sei fest abgespeichert).
   Es ist $F(x) = x^2 - a$, $F'(x) = 2x \neq 0$ für $x > 0$ und $\phi(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$.
   Setze $x_0 = 1$, $x_{k+1} = \phi(x_k)$.
   Behauptung: $|\sqrt{a} - x_5| < 10^{-16}$ für $\frac{1}{2} < a < 1$.

   Beweis. Es gilt: $x - \phi(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{a}{x}\right) = \frac{1}{2x}\left(x^2 - a\right)$.

$$0 < \left(x - \frac{a}{x}\right)^2 = x^2 - 2a + \frac{a^2}{x^2} \Leftrightarrow 4a < x + 2a + \frac{a^2}{x^2} = \left(x + \frac{a}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} < \phi(x)$$

   (a) Zeige induktiv: $1 = x_0 > x_1 > \ldots > x_k > \sqrt{a}$
   Der Fall $k = 0$ ist klar. Betrachte den Schritt $k \to k+1$: Da $x_k > \sqrt{a}$ ist, folgt $x_{k+1} = \phi(x_k) > \sqrt{a}$. Aus $x_k - \phi(x_k) > 0$ folgt $x_k > x_{k+1}$.

   (b) Es gilt

$$\begin{aligned} &|F(x_0)| = |1^2 - a| \leq \frac{1}{2} = \alpha \\ &|F'(x_0)y| = |2y| \quad \Longrightarrow \ \beta = 2 \\ &F'' \equiv 2 \quad \Longrightarrow \ \gamma = 2 \end{aligned}$$

   Also gilt $2\alpha\gamma = 2 < \beta^2 = 4$. Damit folgt $|x_k - \sqrt{a}| \leq |t_k - t^*|$ mit $P(t) = \frac{1}{2} - 2t + t^2$, $t_0 = 0$, $t_{k+1} = t_k - \frac{P(t_k)}{P'(t_k)}$.
   Es ergibt sich

$$\begin{aligned} &t^* - t_0 = t^* \\ &t^* - t_1 \approx 0{,}042 \\ &t^* - t_2 \approx 0{,}0012 \\ &t^* - t_3 \approx 10^{-6} \\ &t^* - t_4 \approx 8 \cdot 10^{-13} \\ &t^* - t_5 < 10^{-16} \end{aligned}$$

$\square$

2. ***Matrixinvertierung auf dem Graphikchip***
Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$; setze $X_0 = \frac{1}{\|A\|_\infty} I_N$, $X_{k+1} = 2X_k - X_k A X_k = \phi(X_k)$, also $\phi(X) = 2X - XAX$. Es gilt

$$\begin{aligned} A^{-1} - \phi(X) &= A^{-1} - 2X - XAX \\ &= A^{-1}AA^{-1} - XAA^{-1} - A^{-1}AX + XAX \\ &= \left(A^{-1} - X\right) A \left(A^{-1} - X\right) \end{aligned}$$

Daraus folgt $\left\|A^{-1} - \phi(X)\right\|_\infty \leq \|A\|_\infty \left\|A^{-1} - X\right\|_\infty^2$.

Herleitung als Newtonverfahren *Betrachte $F(X) = X^{-1} - A$.*
Dann ist $X_{k+1} = X_k - J_F(X_k)^{-1} F(X_k)$ äquivalent zu

$$J_F(X_k)(X_{k+1} - X_k) = -F(X_k)\,. \tag{3}$$

Es gilt $J_F(X)H = \partial_H F(X) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(F(X+tH) - F(X)\right) = -X^{-1}HX^{-1}$, wobei

$$\begin{aligned} F(X+tH) - F(X) &= (X+tH)^{-1} - A - X^{-1} + A = \left(X(I_N + tX^{-1}H)\right)^{-1} - X^{-1} \\ &= \left(I_N - \left(-tX^{-1}H\right)\right)^{-1} X^{-1} - X^{-1} = \sum_{n\geq 1} \left(-tX^{-1}H\right)^n X^{-1} \end{aligned}$$

gilt. Aus (3) folgt damit $-X_k^{-1}(X_{k+1} - X_k)X_k^{-1} = -X_k^{-1} + A$. Auflösen nach X_{k+1} liefert

$$X_{k+1} = 2X_k - X_k A X_k$$

3. ***Eigenwerte***
Zu $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ definiere

$$F(x,\lambda) = \begin{pmatrix} Ax - \lambda x \\ \frac{1}{2}\left(1 - x^T x\right) \end{pmatrix}$$

Es ist also

$$\begin{aligned} J_F \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A - \lambda I_N & -x \\ -x^T & 0 \end{pmatrix} \\ \text{und} \quad \phi \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A - \lambda I_N & -x \\ -x^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Ax - \lambda x \\ \frac{1}{2}\left(1 - x^T x\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sei $Ax^* = \lambda^* x^*$ eine Lösung. Wir untersuchen nun, ob $J_F(x^*,\lambda^*)$ regulär ist. Für jede homogene Lösung (y,μ) von

$$\begin{pmatrix} A - \lambda^* I_N & -x^* \\ -\left(x^*\right)^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_N \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt $Ay - \lambda^* y = (A - \lambda^* I_N)y = \mu x^*$ und damit $(A - \lambda^* I_N)^2 y = 0_N$. Daraus folgt, daß y Hauptvektor ist. Im Fall dass die algebraische Vielfachheit von λ^* gleich der geometrischen Vielfachheit von λ^* ist (z.B. falls A symmetrisch ist), dann $J_F(x^*,\lambda^*)^T$ regulär.

4. ***Nichtlineare Ausgleichsprobleme***

Sei $F : D \subset \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$. Bestimme $x^* \in D$ mit $|F(x^*)|_2 \leq |F(x)|_2, x \in D$.

Definiere $g(x) = \frac{1}{2}|F(x)|_2^2 = \frac{1}{2}F(x)^T F(x)$. Minimiere g, d. h. suche die kritische Stelle von ∇g. Es gilt

$$G(x) = \nabla g(x) = J_g(x)^T = J_F(x)^T F(x)\,,$$
$$J_G(x) = H_g(x) = \sum_{n=1}^{N} H_{F_n}(x)F(x) + J_F(x)^T J_F(x)\,.$$

Gauß-Newton-Verfahren

S0) *Wähle $x^0 \in D$, $\varepsilon > 0$, setze $k = 0$.*

S1) *Falls $\left| J_F\left(x^k\right)^T F\left(x^k\right)\right|_2 < \varepsilon :$ STOP*

S2) *Berechne die Linearisierung $F(y) \approx F(x^k) + J_F(x^k)(y - x^k) = b_k + A_k y$ mit $b_k = F(x^k) - J_F(x^k)x^k$, $A_k = J_F(x^k)$, und berechne x^{k+1} als Lösung des Ausgleichsproblems*

$$|A_k y + b_k|_2 = Min!$$

S3) *Falls $x^{k+1} \notin D :$ STOP (Divergenz)*

S4) *Setze $k := k + 1$; gehe zu S1).*

Newtonverfahren mit Dämpfung

S0) *Wähle $x^0 \in D$, $\theta \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$, setze $k = 0$.*

S1) *Falls $\left|F\left(x^k\right)\right| \leq \varepsilon :$ STOP*

S2) *Löse $J_F\left(x^k\right) d^k = -F\left(x^k\right)$*

S3) *Bestimme $t_k \in \left\{1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^m\right\}$ mit $x^k + t_k d^k \in D$ und $\left|F\left(x^k + t_k d^k\right)\right|_2 < \left|F\left(x^k\right)\right|_2$, sonst: STOP*

S4) *Setze $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$, $k := k + 1$; gehe zu S1).*

Eine Methode, um bessere Startwerte zu finden, ist ein Homotopieverfahren:

Homotopie

Sei $F_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ ein Vektorfeld mit Nullstelle x^0, d. h. $F_0\left(x^0\right) = 0_N$.

Wähle $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_M = 1$.

S0) *Setze $m = 1$.*

S1) *Berechne die Nullstelle x^m von F_m mit $F_m(x) = (1 - \lambda_m)F_0(x) + \lambda_m F(x)$ mit Startwert x^{m-1}.*

S2) *Falls $m < M$ ist, setze $m := m + 1$ und gehe zu S1).*