1 Euklidische Approximation

Sei V ein reeller euklidischer Vektorraum.
Das Skalarprodukt in V wird mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ und die Norm mit $\|\cdot\|_V$ bezeichnet.
$V_N \subset V$ sei ein Teilraum der Dimension $N < \infty$ mit Basis $\{\phi_n\}_{n=1,\dots,N}$.

(1.1) Problemstellung: Sei $v \in V$. Bestimme $v_N \in V$ mit

$$\|v - v_N\|_V = \min_{w_N \in V_N} \|v - w_N\|_V .$$

(1.2) Die Matrix

$$A = \Big(\langle\phi_n, \phi_k\rangle_V\Big)_{n,k=1,\dots,N} \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

ist symmetrisch und positiv definit.

(1.3) Problem (1.1) ist eindeutig lösbar. Es gilt

$$v_N = \sum_{n=1}^{N} x_n \phi_n ,$$

wobei $x^* \in \mathbb{R}^N$ die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Ax = b$$

mit $b = \Big(\langle v, \phi_k\rangle_V\Big)_{k=1,\dots,N} \in \mathbb{R}^N$ ist.