2 Direkte Lösungsverfahren für lineare Gleichungen

(2.1) Sei $L \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix und $b \in \mathbb{R}^N$, d.h. $\operatorname{diag} L = I_N$ und $L[1:n, n+1] = 0_n$ für $n = 1, ..., N-1$. Dann ist L regulär und das lineare Gleichungssystem $Ly = b$ ist mit $O(N^2)$ Operationen lösbar.
Entsprechend ist für eine reguläre obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{N\times N}$ (d.h. $R[n,n] \neq 0$ für alle n und $R[n+1, 1:n] = 0_n^T$ für $n < N$) das LGS $Rx = y$ in $O(N^2)$ Operationen lösbar.

(2.2) Die normierten unteren Dreiecksmatrizen bilden eine Gruppe.
Die regulären oberen Dreiecksmatrizen bilden eine Gruppe.

(2.4) Wenn eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine LR-Zerlegung $A = LR$ mit einer normierten untere Dreiecksmatrix L und einer regulären obere Dreiecksmatrix R besitzt, dann ist A regulär und das LGS $Ax = b$ ist mit $O(N^2)$ Operationen lösbar.

(2.5) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ besitzt genau dann eine LR-Zerlegung von A, wenn alle Hauptuntermatrizen $A[1:n, 1:n]$ regulär sind.
Die LR-Zerlegung ist eindeutig und lässt sich mit $O(N^3)$ Operationen berechnen.

(2.6) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ heißt *strikt diagonal-dominant*, falls $|a_{nn}| > \sum_{k=1}^{n-1} |a_{nk}| + \sum_{k=n+1}^{N} |a_{nk}|$.

(2.7) Wenn A strikt diagonal dominant ist, dann existiert eine LR-Zerlegung.

(2.8) Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch und positiv definit. Dann existiert genau eine Cholesky-Zerlegung $A = LL^T$ mit einer regulären unteren Dreiecksmatrix L.

2 Direkte Lösungsverfahren für lineare Gleichungen

(2.9) Sei $\pi \in S_N$ eine Permutation. Dann heißt $P_\pi = \big(e_{\pi^{-1}(1)}|\ldots|e_{\pi^{-1}(N)}\big) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ Permutationsmatrix zu π. Es gilt $(P_\pi A)[n,k] = A[\pi(n),k]$ und $(AP_\pi)[n,k] = A[n,\pi^{-1}(k)]$.

(2.10) Die Permutationsmatrizen in $\mathbb{R}^{N\times N}$ bilden eine Gruppe. Es gilt $P_\sigma P_\pi = P_{\pi\circ\sigma}$ und $P_{\pi^{-1}} = P_\pi^T$.

(2.11) Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ regulär. Dann existiert eine Permutationsmatrix P, so dass PA eine LR-Zerlegung $PA = LR$ besitzt und für die Einträge $|L[m,n]| \le 1$ gilt.
Sie lässt sich mit $O(N^3)$ Operationen berechnen.
Die Lösung von $Ax = b$ berechnet sich aus $Ly = Pb$ und $Rx = y$.

Sei $|\cdot|$ eine Vektornorm, und sei $\|\cdot\|$ eine zugeordete Matrixnorm, d. h.,

$$|Ax| \le \|A\|\,|x|\,, \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ A \in \mathbb{R}^{M\times N}.$$

(2.12) Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ regulär, und sei $\Delta A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ so klein, dass $\|\Delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ gilt. Dann ist die Matrix $\tilde{A} = A + \Delta A$ regulär.
Sei $b \in \mathbb{R}^N$, $b \ne 0_N$, $\Delta b \in \mathbb{R}^N$ klein und $\tilde{b} = b + \Delta b$.
Dann gilt für die Lösungen $x \in \mathbb{R}^N$ von $Ax = b$ und $\tilde{x} \in \mathbb{R}^N$ von $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$

$$\frac{|\Delta x|}{|x|} \le \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{|\Delta b|}{|b|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right).$$

Dabei ist $\Delta x = \tilde{x} - x$, $\frac{|\Delta x|}{|x|}$ der *relative Fehler*, und $\kappa(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$ die *Kondition* von A.

2 Arithmetische Grundlagen

(2.13) a) Eine Gleitkommazahlen zur Basis $B \in \{2, 3, ...\}$ der Mantissenlänge M und Exponentenlänge E ist die Menge

$$\mathrm{FL} = \Big\{ \pm B^e \sum_{m=1}^{M} a_m B^{-m} \colon e = e^- + \sum_{k=0}^{E-1} c_k B^k,\ a_m, c_k \in \{0, 1, ..., B-1\} \Big\}$$

b) Eine Gleitkommaarithmetik wird durch eine Abbildung $\mathrm{fl} \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{FL}$ mit $\mathrm{fl}(x) = x$ für $x \in \mathrm{FL}$ definiert. Sei bestimmt die Rundung: $x \oplus y = \mathrm{fl}(x+y)$, $x \odot y = \mathrm{fl}(x \cdot y)$, etc. Die zugehörige Maschinengenauigkeit ist $\mathrm{eps} := \max \Big\{ \dfrac{|x - \mathrm{fl}(x)|}{|x|} \colon x \notin \mathrm{FL} \Big\}$.

(2.14) Sei $f \colon \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^K$ eine differenzierbare Funktion und $x \in \mathbb{R}^N$. Dann heißt

a) $\kappa_{\text{abs}}^{kn} = \Big| \frac{\partial}{\partial x_n} f_k(x) \Big|$ *absolute Konditionszahl.*

b) $\kappa_{\text{rel}}^{kn} = \Big| \frac{\partial}{\partial x_n} f_k(x) \Big| \frac{|x_n|}{|f_k(x)|}$ *relative Konditionszahl.*

2 Kondition und Stabilität

Karlsruhe Institute of Technology

(2.15) a) Ein Problem heißt *sachgemäß gestellt*, wenn es eindeutig lösbar ist und die Lösung stetig von den Daten abhängt.

b) Die *Kondition* eines Problems ist eine Maß dafür, wie stark die Abhängigkeit der Lösung von den Daten ist.

c) Die *Stabilität* eines numerischen Algorithmus ist eine Maß dafür, wie stark die Daten-Abhängigkeit der numerischen Lösung im Vergeich zu der exakten Lösung ist.

(2.16) Wir verwenden für $x \in \mathbb{R}^N$ und $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$

$$|x|_1 = \sum_{n=1}^N |x[n]| \qquad |x|_2 = \sqrt{x^T x} \qquad |x|_\infty = \max_{n=1,\dots,N} |x[n]|$$

und die zugeordnete Operatornorm $\|A\|_p = \sup_{x\neq 0_N} \frac{|Ax|_p}{|x|_p}$, d.h.

$$\|A\|_1 = \max_{n=1,\dots,N} \sum_{m=1}^M |A[m,n]|\,, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}\,, \quad \|A\|_\infty = \max_{m=1,\dots,M} \sum_{n=1}^N |A[m,n]|$$

mit *Spekralradius* $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ und Spektrum $\sigma(A)$.