# 4 Eigenwertberechnung

Karlsruhe Institute of Technology

(4.3) $H \in \mathbb{R}^{N\times N}$ heißt *Hessenberg*-Matrix, wenn $H[n+2:N,n] = 0_{N-n-1}$ für $n = 1,...,N-2$.

(4.4) Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Dann existiert eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{N\times N}$, so dass $H = QAQ^T$ eine Hessenberg-Matrix ist. Die Berechnung benötigt $O(N^3)$ Operationen.

Wenn $A$ symmetrisch ist, dann ist $H$ eine Tridiagonalmatrix.

(4.8) Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch, tridiagonal, und irreduzibel, d.h. $A[n-1,n] = A[n,n-1] \neq 0$ und $A[n+2:N,n] = A[n,n+2:N]^T = 0_{N-n-1}$.
Die charakteristischen Polynome $P_n(t) = \det\big(A[1:n,1:n] - tI_n\big)$ der Hauptuntermatrizen lassen sich durch eine Dreitermrekursion berechnen:
Setze $P_0 \equiv 1$. Dann gilt $P_1(t) = A[1,1] - t$ und

$$P_n(t) = (A[n,n]-t)P_{n-1}(t) - A[n-1,n]^2 P_{n-2}(t)\,.$$

Sie bilden eine *Sturmsche Kette*: Für die Nullstellen $\lambda_1^n \le \lambda_2^n \le \cdots \le \lambda_n^n$ von $P_n$ gilt

$$\lambda_{k-1}^{n-1} < \lambda_k^n < \lambda_k^{n-1}\,, \qquad k = 1,...,n$$

(mit $\lambda_0^n = -\|A\|_\infty$ und $\lambda_{n+1}^n = \|A\|_\infty$), und es gilt für $t \in (-\|A\|_\infty, \|A\|_\infty)$

$$\lambda_k^n < t \le \lambda_{k+1}^n$$

mit $k = W_n(t)$ und $W_n(t) = \#\big\{j \in \{1,...,n\} : P_j(t)P_{j-1}(t) < 0 \text{ oder } P_j(t) = 0\big\}$.

# 4 Eigenwertberechnung

Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ und ONB aus Eigenvektoren $v_1,\dots,v_N$. Dann gilt

$$A = \sum_n \lambda_n v_n (v_n)^T \qquad \text{und} \qquad Ax = \sum_n \lambda_n (v_n^T x) v_n\,.$$

(4.9) Der *Rayleigh-Quotient* ist

$$r(A,x) = \frac{x^T A x}{x^T x}\,, \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ x \neq 0_N\,.$$

(4.10) Sei $|\lambda_1| = \rho(A)$ und $|\lambda_n| < |\lambda_1|$ für $n = 2,\dots,N$. Dann gilt für alle $w \in \mathbb{R}^N$ mit $w^T v_1 > 0$

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} r(A, A^k w) = \lambda_1\,, \qquad \lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{|A^k w|_2} A^k w = v_1\,.$$

(4.11) Sei $|w|_2 = 1$ und $\mu = r(A,w)$. Dann gilt

$$\min_{n=1,\dots,N} |\lambda_n - \mu| \le |Aw - \mu w|_2\,.$$

Eine konvergente Folge $(d^k)$ in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert $d^*$ konvergiert

a) *linear*, wenn $c \in (0,1)$ und $k_0 > 0$ existieren mit
$$|d^{k+1} - d^*| \le c|d^k - d^*| \qquad \text{für } k \ge k_0$$

b) *superlinear*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 > 0$ existiert mit
$$|d^{k+1} - d^*| \le \varepsilon|d^k - d^*| \qquad \text{für } k \ge k_0$$

c) *von der Ordnung* $p > 1$, wenn wenn $C > 0$ existiert mit
$$|d^{k+1} - d^*| \le C|d^k - d^*|^p\,.$$

# 4 Eigenwertberechnung

(4.12) Inverse Iteration mit variablem shift

S0) Wähle $z_0 \in \mathbb{R}^N$, $z_0 \neq 0_N$, $\varepsilon \geq 0$. Setze $k = 0$.
S1) Setze $w_k = \frac{1}{|z_k|_2} z_k$, $\mu_k = r(A, w_k)$.
S2) Falls $|Aw_k - \mu_k w_k|_2 \leq \varepsilon$ STOP.
S3) Berechne $z_{k+1} = (A - \mu_k I_N)^{-1} w_k$.
S4) Setze $k := k + 1$, gehe zu S1).

Wenn der Startvektor $z_0$ hinreichend nahe bei einem Eigenvektor $v_m$ mit isoliertem Eigenwert $\lambda_m$ liegt, konvergiert die Iteration kubisch (d.h. von der Ordnung $p = 3$).

(4.13) QR-Iteration mit shift ($A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ symmetrisch)

S0) Berechne $A_0 = QAQ^T$ tridiagonal (Hessenberg-Transformation).
Wähle $\varepsilon \geq 0$. Setze $k = 0$.

S1) Falls $|A_k[n+1, n]| \leq \varepsilon$ für ein $n$:
getrennte Eigenwertberechnung für $A_k[1 : n, 1 : n]$ und $A_k[n+1 : N, n+1 : N]$.

S2) Berechne $d_k = \frac{1}{2}(A_k[N-1, N-1] - A_k[N, N])$ und

$$s_k = A_k[N, N] + d_k - \operatorname{sgn}(d_k)\sqrt{d_k^2 + A_k[N-1, N]^2}\,.$$

S3) Berechne QR-Zerlegung $Q_k R_k = A_k - s_k I_N$ und setze $A_{k+1} = R_k Q_k + s_k I_N$.
S4) Setze $k := k + 1$, gehe zu S1).

Es gilt $A_{k+1} = Q_k^T A_k Q_k$. Falls der shift $\mu_k = A_k[N, N]$ gewählt wird, entspricht die QR-Iteration der Inversen Iteration mit variablem shift und Startvektor $z_0 = e_N$.

# 4 Eigenwertberechnung

(4.14) Gershgorin
Zu $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ sind die Gershgorin-Kreise durch

$$K_n = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda - A[n,n]| \le \sum_{k\neq n} |A[n,k]|\Big\}\,, \qquad n = 1,\dots,N$$

defininiert. Dann gilt

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{n=1}^{N} K_n\,.$$

(4.15) Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_N$.

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \max_{\dim S = n} \ \min_{0_N \neq x \in S} r(A,x)\,,\\
\lambda_{N+1-n} &= \min_{\dim S = n} \ \max_{0_N \neq x \in S} r(A,x)\,.
\end{aligned}$$