5 Iterative Lösungsverfahren für lineare Gleichungen

(5.1) Sei $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit $\rho(I_N - BA) < 1$.
Dann ist A invertierbar, und es gilt für alle $b \in \mathbb{R}^N$ und alle Startvektoren $x^0 \in \mathbb{R}^N$ konvergiert die Iteration

$$x^{k+1} = x^k + B(b - Ax^k), \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

gegen $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} x^k = A^{-1}b$.

(5.2) Sei $K \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und $\varepsilon > 0$
Dann existiert eine Vektor-Norm $|\cdot|$ und eine zugeordnete Matrix-Norm $\|\cdot\|$, so dass $\|K\| \le \rho(K) + \varepsilon$ gilt.

Anwendung: Es gilt $|x - x^k| \le \|I_N - BA\|^k |x - x^0|$ (lineare Konvergenz).

(5.3) Konvergenz des Gauß-Seidel-Verfahrens
Sei $A = L + D + R \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch positiv definit und sei $B = (L + D)^{-1}$.
Dann gilt bezüglich der Energienorm $|x|_A = \sqrt{x^T Ax}$ und $\|K\|_A = \sup\limits_{x\neq 0_N} \frac{|Kx|_A}{|x|_A}$

$$\|I_N - BA\|_A < 1\,.$$

Anwendung der Neumannschen Reihe ergibt dann $A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(I_N - BA)^k B$.

5 Iterative Lösungsverfahren für lineare Gleichungen

(5.4) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ heißt stark diagonal-dominant, wenn

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N} |A[n,k]| \le |A[n,n]|\,, \qquad n = 1,...,N\,,$$

und wenn ein $j \in \{1,\dots,N\}$ existiert $\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N} |A[j,k]| < |A[j,j]|$.

(5.5) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ sei irreduzibel. Dann existiert zu jedem Paar $j \neq n$ eine Folge $j = j_0, j_1, j_2, \dots, j_R = n$ mit $A[j_1, j_0] \neq 0, ..., A[j_R, j_{R-1}] \neq 0$.

(5.6) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ sei stark diagonal-dominant und irreduzibel. Dann gilt:

a) A ist regulär und das Jacobi-Verfahren $x^{k+1} = x^k + \mathrm{diag}(A)^{-1}(b - Ax^k)$ konvergiert.

b) Sei $A[n,n] > 0$ für alle n. Dann ist A positiv definit.

c) Sei $A[n,n] > 0$ und $A[n,k] \le 0$ für $n \neq k$. Dann ist $A^{-1}[n,k] \ge 0$ für alle n,k.

5 Iterative Lösungsverfahren: Krylov-Verfahren

(5.7) Zu $C \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und $d \in \mathbb{R}^N$ ist k-te *Krylov-Raum*

$$\mathscr{K}_k(C,d) = \operatorname{span}\{d, Cd, ..C^{k-1}d\} = \{P(C)d \colon P \in \mathbb{P}_{k-1}\}.$$

(5.8) Zu einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, einer rechten Seite $b \in \mathbb{R}^N$ und einem Startwert $x^0 \in \mathbb{R}^N$ sei $x \in \mathbb{R}^N$ die Lösung von $Ax = b$ und $r^0 = b - Ax^0$.
Sei $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine reguläre Matrix (*Vorkonditionierer*).
Wenn $\dim \mathscr{K}_k(AB, r^0) < k$ für ein k gilt, dann ist $x \in x^0 + \mathscr{K}_{k-1}(BA, Br^0)$.

Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt in $\mathbb{R}^N$.

Gram-Schmidt-Verfahren zur Berechnung einer Orthonormalbasis $v^1, ..., v^k$ von

$$\mathscr{K}_k(BA, Br^0) = \operatorname{span}\{Br^0, BABr^0, ..., (BA)^{k-1}Br^0\} = \{V_k y \colon y \in \mathbb{R}^k\}, \quad V_k = \big(v^1|....|v^k\big).$$

S0) Wähle $x^0 \in \mathbb{R}^N$, setze $r^0 = b - Ax^0$, $z^1 = Br^0$, $h_{10} = |z^1|_V$ und $v^1 = \frac{1}{h_{10}} z^1$.

S1) Für $k = 1, 2, 3, ...$ berechne $w^k = BAv^k$,

$$z^{k+1} = w^k - \sum_{j=1}^{k} h_{jk} v^j \text{ mit } h_{jk} = \langle v^j, w^k\rangle_V$$

$$v^{k+1} = \frac{1}{h_{k+1,k}} z^{k+1} \text{ mit } h_{k+1,k} = |z^{k+1}|_V$$

Dann gilt $BAv^k = \sum_{j=1}^{k+1} h_{jk} v^j$, also $BAV_k = V_{k+1} H_k$ mit $H_k = (h_{jm}) \in \mathbb{R}^{k+1,k}$.

5 Iterative Lösungsverfahren: GMRES-Verfahren

S0) Wähle $x^0 \in \mathbb{R}^N$, $\varepsilon > 0$.
Berechne $r^0 = b - Ax^0$, $z^1 = Br^0$, $h_{10} = |z^1|_2$ und $v^1 = \frac{1}{h_{10}} z^1$. Setze $k = 1$.

S1) Berechne $w^k = BAv^k$ und

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= w^k - \sum_{j=1}^{k} h_{jk} v^j \text{ mit } h_{jk} = (v^j)^T w^k \\ v^{k+1} &= \frac{1}{h_{k+1,k}} z^{k+1} \text{ mit } h_{k+1,k} = |z^{k+1}|_2 \end{aligned}$$

S2) Berechne $y^k \in \mathbb{R}^k$ mit $\rho_k = |H_k y_k - h_{10} e^1|_2 = \min!$
Dabei ist $H_k = (h_{jm})_{j=1,\dots,k+1,\ m=1,\dots,k} \in \mathbb{R}^{k+1,k}$.

S3) Wenn $\rho_k < \varepsilon$, setze $x^k = x^0 + \sum_{j=1}^{k} y_j^k v^j$ STOP.

S4) Setze $k := k+1$ und gehe zu S1).

(5.4) Es gilt $\rho_k = \min_{z \in x^0 + \operatorname{span}\{v^1,\dots,v^k\}} |B(b - Az)|_2$.

Das GMRES-Verfahren ist wohldefiniert, und wenn es abbricht, gilt $|x - x^k|_2 \le \|(BA)^{-1}\|_2 \varepsilon$.

(5.5) Für $C \ge \alpha > 0$ gelte $z^T BAz \ge \alpha z^T z$ und $\|BA\|_2 \le C$.

Dann gilt für das GMRES-Verfahren $|x^k - x|_2 \le \kappa_2(BA) \left(1 - \frac{\alpha^2}{C^2}\right)^{k/2} |x^0 - x|_2$.

5 Iterative Lösungsverfahren: CG-Verfahren

S0) Wähle $x^0 \in \mathbb{R}^N$, $\varepsilon > 0$.
Berechne $r^0 = b - Ax^0$, $y^0 = Br^0$, $\rho_0 = (y^0)^T r^0$ und $d^1 = y^0$. Setze $k = 0$.

S1) Falls $\rho_k \leq \varepsilon$ STOP

S2) Setze $k := k+1$ und berechne

$$\begin{aligned}
u^k &= Ad^k \\
\alpha_k &= \frac{\rho_{k-1}}{(u^k)^T d^k} \\
x^k &= x^{k-1} + \alpha_k d^k \\
r^k &= r^{k-1} - \alpha_k u^k \\
y^k &= Br^k \\
\rho_k &= (y^k)^T r^k \\
d^{k+1} &= y^k + \frac{\rho_k}{\rho_{k-1}} d^k
\end{aligned}$$

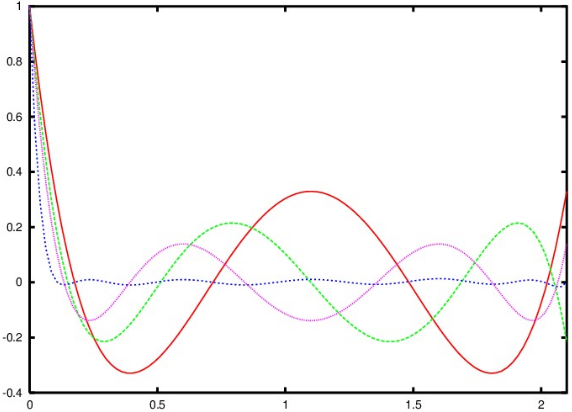
Gehe zu S1).

$$\begin{aligned}
|x^k - x|_A &= \min_{z \in x^0 + \operatorname{span}\{d^1,\dots,d^k\}} |z - x|_A \\
&\leq \min_{P \in \mathbb{P}_k,\ P(0)=1} \max_{\lambda \in \sigma(BA)} |P(\lambda)||x^0 - x|_A \leq 2\left(\frac{\sqrt{\kappa(BA)} - 1}{\sqrt{\kappa(BA)} + 1}\right)^k |x^0 - x|_A\,.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

5 Transformierte Chebychev-Polynome

(5.6)

$$\min_{P \in \mathbb{P}_k,\ P(0)=1} \max_{t \in [a,b]} |P(t)| \le 2 \left(\frac{\sqrt{\frac{b}{a}} - 1}{\sqrt{\frac{b}{a}} + 1} \right)^k$$



P_4, P_5, P_6, P_{12} mit $P_k(0) = 1$ zu $[a,b] = [0.1, 2.1]$