6 Lösungsverfahren für nichtlineare Gleichungen

(6.1) Sei $D \subset \mathbb{R}^N$ konvex und $F\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^N$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.
Sei $x^* \in D$ eine Nullstelle von F, und sei $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$.
Wenn $\rho\big(I_N - BJ_F(x^*)\big) < 1$ gilt, dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x^0 \in B(x^*,\delta)$ die Fixpunktiteration $x^{k+1} = \Phi(x^k)$ mit $\Phi(x) = x - BF(x)$ linear gegen x^* konvergiert.

(6.2) Banachscher Fixpunktsatz
Sei $D \subset \mathbb{R}^N$ konvex und $\phi\colon D \longrightarrow D$ kontrahierend mit $q \in (0.1)$, d.h.

$$|\phi(y) - \phi(z)| \le q\,|y - z| \quad \text{für} \quad y,z \in D\,.$$

Dann existiert genau ein Fixpunkt $x^* \in D$ von ϕ, d.h. $\phi(x^*) = x^*$, und es gelten für die Fixpunktiteration $x^{k+1} = \Phi(x^k)$ die Abschätzungen

$$|x^k - x^*| \le \frac{q^k}{1-q}\,|x^0 - x^1| \qquad \text{und} \qquad |x^k - x^*| \le \frac{q}{1-q}\,|x^k - x^{k-1}|\,.$$

(6.3) Seien $\alpha,\beta,\gamma > 0$ mit $2\alpha\gamma < \beta^2$ und $P(t) = \alpha - \beta t + \frac{\gamma}{2}t^2$.
Dann konvergiert für $t_0 = 0$ das Newton-Verfahren

$$t_{k+1} = t_k - P'(t_k)^{-1}P(t_k)$$

quadratisch gegen die kleinste Nullstelle t^* von P, und $\{t_k\}$ ist monoton steigend mit

$$t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = t_k + \frac{\gamma}{2}\,\frac{(t_k - t_{k-1})^2}{\beta - \gamma t_k} \le t^* = \frac{2\alpha}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\alpha\gamma}}\,.$$

(6.3) Sei $D \subset \mathbb{R}^N$ offen und $F\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^N$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Sei $x^0 \in D$ mit

a) $|F(x^0)| \le \alpha$

b) $|J_F(x^0)y| \ge \beta\,|y|$ für $y \in \mathbb{R}^N$

c) $B(x^0, 2\alpha/\beta) = \{z \in \mathbb{R}^N\colon |z - x^0| \le 2\alpha/\beta\} \subset D$

d) $\|J_F(y) - J_F(z)\| \le \gamma |y - z|$ für $y, z \in B(x^0, 2\alpha/\beta)$

e) $2\alpha\gamma < \beta^2$.

Dann ist das Newton-Verfahren $x^{k+1} = x^k - J_F(x^k)^{-1}F(x^k)$ wohldefiniert und konvergiert quadratisch gegen $x^* \in D$ mit

$$|x^* - x^0| \le \frac{2\alpha}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\alpha\gamma}}\,.$$

Gedämpftes Newton-Verfahren

S0) Wähle $x^0 \in D$, $\varepsilon > 0$, $\theta \in (0,1)$. Setze $k = 0$.

S1) Falls $|F(x^k)| \le \varepsilon$ STOP

S2) Löse $J_F(x^k)d^k = -F(x^k)$.

S3) Bestimme $t_k \in \{1, \theta, \theta^2, ..., \theta^r\}$ mit $|F(x^k + t_k d^k)|$ minimal.

S4) Setze $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$, $k := k+1$ und gehe zu S1).