Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer

Numerische Mathematik 1 — Programmierpraktikum
Übungsblatt 5 vom 23. Januar 2013
Wintersemester 2012/13

Programmieraufgabe 9 (cg-Verfahren mit Vorkonditionierung) (Abgabe)
Schreiben Sie ein Programm, welches zu gegebener positiv definiter Tridiagonalmatrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit dem vorkonditionierten cg-Verfahren löst. Sei B der Vorkonditionierer. Dann lautet der Algorithmus:

$$
\begin{aligned}
& r^0 = b - Ax^0;\ d^1 = Br^0;\ \rho_0 = \langle d^0, r^0\rangle_2;\ k = 0;\\
& \text{while } (r^k \neq 0)\\
& \qquad k = k+1\\
& \qquad u^k = Ad^k\\
& \qquad \alpha_k = \frac{\rho_k}{\langle u^k, d^k\rangle_2};\\
& \qquad x^k = x^{k-1} + \alpha_k d^k;\\
& \qquad r^k = r^{k-1} - \alpha_k u^k;\\
& \qquad v^k = Br^k\\
& \qquad \rho_k = \langle v^k, r^k\rangle_2;\\
& \qquad d^{k+1} = v^{k+1} + \frac{\rho_k}{\rho_{k-1}} d^k;\\
& \text{end;}
\end{aligned}
$$

Wählen Sie zur Vorkonditionierung das symmetrische Gauß-Seidel-Verfahren, d.h. die Matrix

$$B = (D + L^T)^{-1} D (D + L)^{-1}$$

mit $D = \mathrm{diag}(A)$ und der unteren Dreiecksmatrix L aus der Zerlegung $A = D + L + L^T$. Verwenden Sie den Startwert $x^0 = 0$. Brechen Sie die Iteration ab, sobald das Residuum

$$\|r^m\|_2 \le \tau \|b\|_2 \quad \text{mit} \quad \tau = 10^{-5}$$

erfüllt.
Zusätzlich soll das cg-Verfahren auch ohne Vorkonditionierung implementiert werden, das heißt $B = I$. Testen Sie beide Methoden mit der Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit

$$
a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{falls } i = j,\\ -1 & \text{falls } |i-j| = 1,\\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}
$$

und dem Vektor $b = (b_i) \in \mathbb{R}^N$, $b_i = \sin(i^2)$, für $N = 1000 \cdot 2^l$, $l = 0, 1, 2, 3, 4$. Geben Sie jeweils die Anzahl der benötigten Iterationsschritte sowie die Norm des Residuums nach dem letzten Iterationsschritt aus.

Vermeiden Sie bei der Programmierung die Verwendung von Matrizen als Datenstrukturen, bevorzugen Sie Vektoren. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Implementieren Sie die Matrix A über zwei Vektoren `D` und `L`.
- Schreiben Sie eine Funktion `x = A_v(D,L,v)`, die die Matrix A auf einen Vektor `v` anwendet, das heißt es wird `x=`A`v` berechnet.
- Schreiben Sie eine Funktion `x = precond(D,L,y)`, die das symmetrische Gauß-Seidel-Verfahren auf einen Vektor `y` anwendet.
- Implementieren Sie das cg-Verfahren mit und ohne Vorkonditionierer über eine Funktion `[x,absr,k] = cgtridiag(D,L,b,x0,mod)`. Hierbei bezeichnet `x` die Lösung, `absr` die Norm des Residuums und `k` die Anzahl der Schritte. Über `mod = 'sgs'` bzw. `mod = 'no'` soll der zugehörige Vorkonditionierer ausgewählt werden. Über den Befehl `strcmp(mod,'sgs')` können Sie entscheiden, ob `mod = 'sgs'` gesetzt wurde, um somit den betreffenden Vorkonditionierer auszuwählen.

Abgabe der Programmieraufgaben:

Die bearbeiteten Programmieraufgaben können Sie mittwochs von 15:00 - 17:00 im Rechnerpool Geb. 01.93 (Kronenstr. 32, Raum 101) vorführen und erläutern. Dort haben Sie auch die Möglichkeit, unter Hilfestellung zu programmieren. Die Abgabe dieses Programmierblattes ist bis spätestens **Mittwoch, den 06. Februar 2013** möglich.

Service/Material:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa12012w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch aktuelle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Dienstag, 09.30-10.30 Uhr und nach Vereinbarung
Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer: Mittwoch, 14.30-15.30 Uhr und nach Vereinbarung