Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer

Numerische Mathematik 1 Tutorium 0 (22.10 - 26.10)

Wintersemester 2012/13

Aufgabe 1 (Orthogonale Matrizen)

Sei $e_1, \dots, e_N$ die Basis von Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^N$.
Sei $q_1, \dots, q_N$ eine Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^N$ und $Q = \begin{pmatrix} q_1 | & \dots & | q_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

(a) Zeigen Sie: Es gilt $Q^T Q = I_N = Q Q^T$, das heißt, die Matrix Q ist orthogonal. Was heißt das für die Zeilen der Matrix Q?

(b) Zeigen Sie, dass $|\det(Q)| = 1$ für jede orthogonale Matrix Q gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $I_N = \sum_{n=1}^N q_n q_n^T$ und $Q = \sum_{n=1}^N q_n e_n^T$.

(d) Sei $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ und $Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \dots q_N \end{pmatrix}$ orthogonal. Zeigen Sie, dass für $A = Q \Lambda Q^T$ gilt: A ist symmetrisch und lässt sich darstellen als $A = \sum_{n=1}^N \lambda_n q_n q_n^T$.

(e) Falls $\lambda_n \neq 0 \; \forall n \in \{1, \dots, N\}$, so gilt für A aus Aufgabenteil (d)

$$A^{-1} = \sum \frac{1}{\lambda_n} q_n q_n^T \,.$$

(f) Sei $A^s = \sum \lambda_n^s q_n q_n^T$ für $s \geq 0$. Zeigen Sie:

$$A^s A^t = A^{s+t} \,.$$

Aufgabe 2 (symmetrische Matrizen)

Sei $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie:

(a) A hat nur reelle Eigenwerte.

(b) Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer symmetrischen Matrix A sind orthogonal.

(c) Ist λ ein Eigenwert der Vielfachheit k, so hat λ auch einen k-dimensionalen Eigenraum (was heißt das?). Benutzen Sie dabei vollständige Induktion und führen Sie einen Basiswechsel über eine geschickt gewählte orthogonale Matrix Q wie folgt durch: Mit $Aq_1 = \lambda_1 q_1$ folgt $Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. Beachten Sie dabei, dass durch einen Basiswechsel die Eigenwerte erhalten bleiben.

(d) A lässt sich darstellen als $A = Q \Lambda Q^T$ mit $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ und Q eine orthogonale Matrix (wie zeichnet sich Q aus?).