Numerische Mathematik 1 Tutorium 2 (12.11 - 16.11)

Wintersemester 2012/13

Aufgabe 1 (Auslöschung)

Formen Sie die Ausdrücke

(a) $\frac{1}{1+2x} - \frac{1-x}{1+x}$ für $|x| \ll 1$

(b) $\sqrt{x + \frac{1}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}}$ für $|x| \gg 1$

(c) $\frac{1-\cos x}{x}$ für $x \neq 0, |x| \ll 1$

so um, dass ihre Auswertung gutartig ist.

Aufgabe 2 (induzierte Matrixnorm)

Sei $T \in \mathbb{C}^{N\times N}$ regulär und $\|\cdot\|$ eine Vektornorm und $\|\cdot\|_M$ die induzierte Matrixnorm. Zeigen Sie, dass die durch die Vektornorm $\|x\|_T = \|Tx\|$ induzierte Matrixnorm durch

$$\|A\|_T = \|TAT^{-1}\|_M$$

gegeben ist.

Aufgabe 3 (Wurzel einer symmetrisch positiv definiten Matrix)

Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch positiv definit. Zeigen Sie:
Es existiert genau eine symmetrisch positiv definite Matrix $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit $B^2 = A$.

Aufgabe 4 (Kondition einer symmetrischen Matrix)

Zeigen Sie, dass für eine reguläre symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit Eigenwerten $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_N|$ gilt:

$$\|A\|_2 = |\lambda_1| \quad \text{und} \quad \kappa_2(A) = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_N|}\,.$$