

Numerische Mathematik 1 Tutorium 3 (26.11 - 30.11)

Wintersemester 2012/13

Aufgabe 1 (Von einer Cholesky zur QR -Zerlegung)

Sei $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ regulär.

- (a) Zeigen Sie, dass $A^T A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ symmetrisch und positiv definit ist.
- (b) Benutzen Sie die Cholesky-Zerlegung $A^T A = LL^T$, um eine QR -Zerlegung von A herzuleiten.

Aufgabe 2 (Anwendung einer QR -Zerlegung mit Householder)

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 5, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 10, \end{aligned}$$

unter Verwendung der QR -Zerlegung und Householder-Matrizen. Stellen Sie dabei die Householder-Matrizen nicht explizit auf, sondern verwenden Sie Skalarprodukte zur direkten Berechnung der jeweiligen Spalten.

Aufgabe 3 (Ausgleichsproblem der Piraten)

Auf Marley Island ist ein Unglück passiert: Die Gouverneurin Ylaine^(*) wurde vom bösen Geisterpiraten LeZuck^(*) entführt. Der mächtige Pirat G. Ulysses Seepgood^(*) macht sich auf den Weg, um seine große Liebe zu retten. Allerdings weiß er nicht, wo er suchen soll. Zum Glück sendet Ylaines Diamantring in einer Frequenz, die G. Seepgood mit seinem dreiköpfigen Voodoo-Schrumpf-Affen empfangen kann. So macht er sich auf den Weg an fünf Positionen auf der Insel und markiert die Richtungen, von denen er die Strahlung des Diamantringes (näherungsweise) empfängt.

Um seine Daten zu sichern, benutzt er ein (x, y) -Koordinatensystem und notiert sich die Tangenswertes der Richtungswinkel α , die von der positiven x -Achse gegen den Uhrzeigersinn gemessen werden.

Standort	1	2	3	4	5
X-Koordinate	3	0	5	6	1
Y-Koordinate	5	11	15	3	8
$\tan \alpha$	1/3	-1/3	-1	1	0

(*) Ähnlichkeiten mit "bekanntem" Persönlichkeiten oder Gegebenheiten sind rein zufällig und nicht gewollt, da die Namen vom Übungsleiter bis zur Unkenntlichkeit geändert worden sind.

- (a) Stellen Sie die Situation anhand einer Skizze dar und schätzen Sie den Ort $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ an der sich Ylaine befinden könnte.
- (b) Jede Messung entspricht einer Geradengleichung in den Unbekannten (x, y) . Stellen Sie mit Hilfe aller Messungen ein (überbestimmtes) Gleichungssystem auf.
- (c) Berechnen und lösen Sie die Normalengleichung als Ausgleichsproblem.