Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer

Numerische Mathematik 1 Tutorium 4 (10.12 - 14.12)

Wintersemester 2012/13

Aufgabe 1 (Singulärwertzerlegung)
Sei $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ eine rechteckige Matrix vom Rang $R \leq \min\{M, N\}$ mit den Singulärwerten $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_R > 0$.

(a) Zeigen Sie: $\|A\|_2 = \sigma_1$.

(b) Zeigen Sie: Ist A symmetrisch und positiv semidefinit, so ist jeder Singulärwert ein Eigenwert von A.

(c) Zeigen Sie: Seien $P \in \mathbb{R}^{M\times M}$ und $Q \in \mathbb{R}^{N\times N}$ zwei orthogonale Matrizen, so besitzt PAQ dieselben Singulärwerte wie A.

Aufgabe 2 (Links- und Rechtseigenvektoren)
Betrachten Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Ein Vektor $0 \neq x \in \mathbb{C}^N$ heißt Rechtseigenvektor von A wenn es einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $Ax = \lambda x$ und ein Vektor $0 \neq y \in \mathbb{C}^N$ heißt Linkseigenvektor wenn es einen Eigenwert $\mu \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $A^T y = \mu y$ gilt. Zeigen Sie, dass A und A^T dieselben Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ besitzen und dass für die zugehörigen Eigenvektoren $x^n, y^n \in \mathbb{C}^N$ (d.h. $Ax^n = \lambda_n x^n$ und $A^T y^n = \lambda_n y^n$, $n = 1, \dots, N$) folgende Biorthogonalität gilt: $(x^n)^T y^m = 0$ falls $\lambda_m \neq \lambda_n$.

Aufgabe 3 (verallgemeinertes Eigenwertproblem)

(a) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch und B zusätzlich positiv definit. Zeigen Sie, dass das verallgemeinerte Eigenwertproblem $Ax = \lambda Bx$ auf ein äquivalentes Eigenwertproblem $Cy = \lambda y$ mit einer symmetrischen Matrix $C \in \mathbb{R}^{N\times N}$ zurückgeführt werden kann.

(b) Bestimmen Sie zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

die entsprechende Matrix C.

Aufgabe 4 (Eigenwert- und Eigenvektorberechnung)
Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon\cos(\frac{2}{\varepsilon}) & -\varepsilon\sin(\frac{2}{\varepsilon}) \\ -\varepsilon\sin(\frac{2}{\varepsilon}) & 1 - \varepsilon\cos(\frac{2}{\varepsilon}) \end{pmatrix}.$$

Wie verhalten sich A_ε und ihre Eigenwerte und Eigenvektoren für $\varepsilon \to 0$?