Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer

Numerische Mathematik 1 — Tutorium 6 (14.01 - 18.01)

Wintersemester 2012/13

Aufgabe 1 (Gerschgorin)

(a) Zeigen Sie mit dem Satz von Gerschgorin, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist.

(b) Gegeben seien die tridiagonalen Matrizen

$$A_N = (N+1)^2 \begin{pmatrix} 7 & -3 & & \\ -3 & 7 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -3 \\ & & -3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \ N > 1 \, .$$

estimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin eine Approximation an die Konditionszahl $\kappa_2(A_N)$.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin, dass jede strikt diagonaldominante, quadratische Matrix regulär ist. Geben Sie ein Beispiel für eine singuläre, diagonaldominante, quadratische Matrix an.

Aufgabe 2 (Gesamtschritt-/Einzelschritt-Verfahren)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie

(a) Das Jacobi-Verfahren (Gesamtschrittverfahren) konvergiert.

(b) Das Gauß-Seidel-Verfahren (Einzelschrittverfahren) konvergiert nicht.

Aufgabe 3 (Gesamtschritt-/Einzelschritt-Verfahren #2)
Gegeben sei das LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & \alpha \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Dieses soll mit dem Gesamt- und dem Einzelschrittverfahren gelöst werden.

(a) Zeigen Sie, dass das Gesamtschrittverfahren für alle $\alpha \in (-3, 3)$ konvergiert.

(b) Bestimmen Sie die Iterationsmatrix des Einzelschrittverfahrens in Abhängigkeit von α.

(c) Berechnen Sie die ersten drei Iterierten des Einzel- und des Gesamtschrittverfahrens für $\alpha = 1$ mit der Startnäherung $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

(d) Geben Sie für das Gesamtschrittverfahren eine a posteriori-Fehlerabschätzung $\|x^{(3)} - x\|_\infty$ an und vergleichen Sie mit dem wahren Fehler (die Lösung sollte inzwischen bekannt sein).

(e) Bestimmen Sie für das Gesamtschrittverfahren zu $\varepsilon = 10^{-3}$ die Anzahl k der Iterationsschritte, so dass $\|x^{(k)} - x\|_\infty < \varepsilon$ garantiert werden kann.