Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer

Numerische Mathematik 1 Tutorium 6 (28.01 - 01.02)

Wintersemester 2012/13

Aufgabe 1 (CG-Verfahren)
Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer symmetrischen positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und $x, b \in \mathbb{R}^N$. Über die Matrix A sei bekannt, dass die Eigenwerte im Intervall $[7, 28]$ liegen. Für das LGS $Ax = b$ sollen so viele Iterationsschritte des CG-Verfahrens (ohne Vorkonditionierung) durchgeführt werden, dass die Abschätzung

$$\left|x^k - x\right|_A < \epsilon\left|x^0 - x\right|_A, \quad (0 < \epsilon \ll 1)$$

für die k-te Iterierte erfüllt ist. Zeigen Sie, dass dies in exakter Arithmetik nach spätestens

$$k \geq \frac{\log(2) - \log(\epsilon)}{\log(3)}$$

Schritten garantiert werden kann.

Aufgabe 2 (Konvergenzgeschwindigkeit des CG-Verfahrens)

(a) Zeigen Sie: Um beim cg-Verfahren den Fehler in der Energienorm um einen Faktor ε zu reduzieren, d.h.

$$\|e^k\|_A = \|x^k - x\|_A \leq \varepsilon\|e^0\|_A\,,$$

benötigt man höchstens k cg-Iterationen, wobei k die kleinste ganze Zahl ist mit

$$k \geq \frac{1}{2}\sqrt{\kappa_2(A)}\,\ln\left(2/\varepsilon\right).$$

Hinweis: Für $a > 1$ gilt

$$\ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right) > \frac{2}{a}\,.$$

(b) Das cg-Verfahren werde auf eine positiv definite Matrix A angewendet. Es ist lediglich bekannt, dass $\|e^0\|_A = 1$ und $\|e^{10}\|_A = 2^{-9}$ ist. Berechnen Sie aus diesen Informationen eine untere Schranke für $\kappa_2(A)$ und überprüfen Sie damit die Ungleichung aus a).

Aufgabe 3 (GMRES - Minimalisierungsproblem)
Im Teilschritt S2) des GMRES-Verfahrens muss ein lineares Ausgleichsproblem mit einer oberen Hessenberg-Matrix gelöst werden, d.h.

$$\rho_k := |h_{10}e^1 - H_k y^k|_2 = \min!\,,$$

wobei $H_k \in \mathbb{R}^{k+1,k}$ obere Hessenberg-Matrix mit $\operatorname{rang}(H_k) = k$ ist. Verwenden Sie eine QR-Zerlegung von H_k und formulieren Sie einen Algorithmus zur Berechnung von $y^k \in \mathbb{R}^k$. Auf welche Art und Weise würden Sie die QR-Zerlegung in jedem Schritt k berechnen?

CG-Verfahren ohne Vorkonditionierung:

S0) Wähle $x^0 \in \mathbb{R}^N$, $\epsilon > 0$. Berechne $r^0 = b - Ax^0$, $\rho_0 = \langle r^0, r^0 \rangle$, $d^1 = r^0$. Setze $k = 0$.

S1) Falls $\rho_k \leq \epsilon$ STOP

S2) Setze $k := k + 1$ und berechne

$$\begin{aligned}
u^k &= Ad^k \\
\alpha_k &= \frac{\rho_{k-1}}{\langle u^k, d^k \rangle} \\
x^k &= x^{k-1} + \alpha_k d^k \\
r^k &= r^{k-1} - \alpha_k u^k \\
\rho_k &= \langle r^k, r^k \rangle \\
d^{k+1} &= r^k + \frac{\rho_k}{\rho_{k-1}} d^k
\end{aligned}$$