Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer

Numerische Mathematik 1 — Übungsblatt 1 vom 22. Okt. 2012

Wintersemester 2012/13

Aufgabe 1 (Berechnung einer LR-Zerlegung)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 8 & 6 & -14 \\ 3 & 6 & \alpha & -15 \\ -4 & -14 & -15 & 30 \end{pmatrix}$$

mit einem reellen Parameter α. Berechnen Sie die zugehörige LR-Faktorisierung von A ohne Pivotisierung. Geben Sie an, für welchen Wert des Parameters α diese nicht existiert. Für welches α ist die Matrix singulär?

Aufgabe 2 (schriftlich - 8 Punkte) (LR-Zerlegung in beliebiger Dimension)
Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit den Einträgen

$$A[i,j] = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \text{ oder } j = N, \\ -1, & \text{falls } i > j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie zunächst die LR-Zerlegung der Matrix A für $N = 4$ und leiten Sie daraus induktiv die LR-Zerlegung für allgemeines N her.

Aufgabe 3 (schriftlich - 12 Punkte) (LR-Zerlegung einer Tridiagonalmatrix)
Für die Koeffizienten der Tridiagonalmatrix

$$A := \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_3 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & c_2 & a_3 & b_4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & b_N \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_{N-1} & a_N \end{pmatrix}$$

gelte

$$\begin{aligned} &|a_1| > |c_1|, |a_N| > |b_N|, \\ &|a_i| \geq |b_i| + |c_i| \quad \text{für } i = 2,3,\dots,N-1 \\ &c_i \neq 0\,. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass für A eine Dreieckszerlegung der Form

$$A = LR = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ \gamma_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \gamma_{N-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & b_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b_N \\ 0 & & & \alpha_N \end{pmatrix}$$

existiert. Geben Sie Rekursionsformeln zur Berechnung der α_i und γ_i an und zeigen Sie ihre Wohldefiniertheit, das heißt, zeigen Sie, dass $\alpha_i \neq 0$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie simultan, dass $|\alpha_i| > 0$ und $|c_i/\alpha_i| < 1$ gilt.

(b) Geben Sie Rekursionsformeln für die Lösung des Systems $Ax = d$ an, indem Sie die LR-Zerlegung aus Teil (a) verwenden.

Aufgabe 4 (schriftlich - 10 Punkte) (Cholesky-Zerlegung)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine symmetrische, positiv definite Bandmatrix der Bandbreite m, das heißt, $a[i,j] = 0$ für i,j mit $|i-j| \geq m$. Zeigen Sie, dass in der Cholesky-Faktorisierung $A = LL^T$ die untere Dreiecksmatrix L eine Bandmatrix der Bandbreite m ist.

Aufgabe 5 (Wiederholung Vektornormen)
Sei $x \in \mathbb{R}^N$. Beweisen Sie die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{N}\|x\|_\infty \\ \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{N}\|x\|_2\,. \end{aligned}$$

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **Montag, den 05. November 2012, 13.00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerische Mathematik 1** im 1.OG des C-Teils des ehemaligen Allianz-Gebäudes einzuwerfen (Kaiserstraße 93). Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer**, sowie die zugehörige **Tutorengruppe** (A-D) und heften Sie die Blätter zusammen.

Service/Material:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa12012w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch aktuelle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Dienstag, 09.30-10.30 Uhr und nach Vereinbarung
Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer: Mittwoch, 14.30-15.30 Uhr und nach Vereinbarung