Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer

Numerische Mathematik 1 — Übungsblatt 2 vom 05. Nov. 2012

Wintersemester 2012/13

Aufgabe 6 (schriftlich - 8 Punkte) (Block-LDL^T-Zerlegung)
Betrachten Sie zu symmetrisch und positiv definiten Matrizen $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und $C \in \mathbb{R}^{M\times M}$, sowie zu $B \in \mathbb{R}^{M\times N}$ die symmetrische Matrix

$$K = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & -C \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+M,N+M}.$$

Zeigen Sie, dass K genau N positive und genau M negative Eigenwerte besitzt.

Machen Sie dazu den Ansatz $K = LDL^T$. Dabei haben $L, D \in \mathbb{R}^{N+M,N+M}$ die Formen

$$L = \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ L_1 & I_M \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

mit $L_1 \in \mathbb{R}^{M\times N}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und $D_2 \in \mathbb{R}^{M\times M}$. I_N bzw. I_M bezeichnen jeweils die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^N$ bzw. $\mathbb{R}^M$.

Unter welchen Umständen trifft die Aussage auch zu falls $C = 0$ ist?

Aufgabe 7 (schriftlich - 10 Punkte) (Gleitkommazahlrechnung)
Betrachten Sie die offenbar äquivalenten Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 10^{-3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

auf einem Rechner mit dreistelliger Dezimaldarstellung, also mit relativer Maschinengenauigkeit $\text{eps} = 5 \cdot 10^{-3}$. In der Arithmetik dieses Rechners lautet die Lösung der obigen Gleichungssysteme

$$x_1 = 4 \quad \text{und} \quad x_2 = 4.$$

Führen Sie die Gauß-Elimination (ohne Pivotisierung) zur Berechnung einer LR-Zerlegung auf diesem fiktiven Rechner durch. Lösen Sie mit Hilfe dieser Zerlegung das Gleichungssystem auf diesem Rechner und vergleichen Sie die erhaltenen Ergebnisse.

Aufgabe 8 (schriftlich - 12 Punkte) (Konditionsbetrachtung)
Gegeben sei die reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit den Spalten $s_1, \dots, s_N \in \mathbb{R}^N$ und den Zeilen $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{R}^N$, das heißt $A = (s_1, \dots, s_N) = (z_1, \dots, z_N)^T$, sowie die Diagonalmatrizen $D_s = \operatorname{diag}(|s_i|_1^{-1} : 1 \le i \le N)$ und $D_z = \operatorname{diag}(|z_i|_1^{-1} : 1 \le i \le N)$. Zeigen Sie:

(a) $\kappa_1(AD_s) = \min\limits_{D\in\mathcal{D}} \kappa_1(AD)$

(b) $\kappa_\infty(D_z A) = \min\limits_{D\in\mathcal{D}} \kappa_\infty(DA)$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{D}$ die Menge der regulären $N \times N$-Diagonalmatrizen.

Aufgabe 9 (Auslöschung)
Betrachten Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log(x + \sqrt{x^2+1}).$$

(a) Für welche x-Werte tritt hier das Auslöschungsphänomen auf? (Erwartet wird ein ungefährer Bereich)

(b) Wie kann man den Auslöschungseffekt vermeiden?
Hinweis: Betrachten und zeigen Sie eine vorhandene Symmetrie von f.

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **Montag, den 19. November 2012, 13.00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerische Mathematik 1** im 1.OG des C-Teils des ehemaligen Allianz-Gebäudes einzuwerfen (Kaiserstraße 93). Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer**, sowie die zugehörige **Tutorengruppe** (A-D) und heften Sie die Blätter zusammen.

Service/Material:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa12012w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch aktuelle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Dienstag, 09.30-10.30 Uhr und nach Vereinbarung
Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer: Mittwoch, 14.30-15.30 Uhr und nach Vereinbarung