Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer

Numerische Mathematik 1 — Übungsblatt 3 vom 19. Nov. 2012

Wintersemester 2012/13

Aufgabe 10 (schriftlich - 8 Punkte) (QR-Zerlegung)
Für zwei orthogonale Matrizen Q_1, $Q_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und zwei reguläre oberen Dreiecksmatrizen R_1, $R_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$ gelte $Q_1R_1 = Q_2R_2$. Zeigen Sie, dass dann eine Diagonalmatrix $D \in R^{N\times N}$ existiert, so dass $Q_2 = Q_1D$ und $R_2 = DR_1$ gilt.

Aufgabe 11 (Givens-Rotation und Householder-Spiegelung)
Betrachten Sie zu $\theta \in [0, 2\pi)$ eine Givens-Rotation $Q = G(m, n, \theta) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ bzgl. $m, n \in \{1, \ldots, N\}$, $m \neq n$ und dem Winkel θ, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} Q[m,m] &= \cos(\theta) & Q[m,n] &= \sin(\theta) \\ Q[n,m] &= -\sin(\theta) & Q[n,n] &= \cos(\theta) \\ Q[k,k] &= 1 \quad (k \neq m,n). \end{aligned}$$

Außerdem sei eine Householder-Spiegelung $H = I_N - \frac{2}{w^Tw}ww^T \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit $0_N \neq w \in \mathbb{R}^N$ gegeben.

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von Q und von H. Geben Sie zudem alle Eigenvektoren von Q an und charakterisieren Sie die Eigenvektoren von H geeignet.

Aufgabe 12 (schriftlich - 12 Punkte) (QR-Zerlegung und Anwendung)
Betrachten Sie für $M \geq N$, $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ und $\operatorname{rang}(A) = N$ das lineare Ausgleichsproblem

$$\text{Finde } u^\star \in \mathbb{R}^N: \quad |Au^\star - b|_2 = \min_{u\in\mathbb{R}^N} |Au - b|_2 \tag{1}$$

und das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(a) Sei $c = 0_N$. Zeigen Sie: Der Vektor $\begin{pmatrix} r^\star \\ u^\star \end{pmatrix}$ ist genau dann eine Lösung von (2), wenn $u^\star$ (1) löst und $r^\star = b - Au^\star$ gilt.

(b) Sei $c \in \mathbb{R}^N$ beliebig. Konstruieren Sie einen Algorithmus zur Lösung von (2), der eine vorhandene QR-Zerlegung von A nutzt. Betrachten Sie dabei insbesondere den Fall $M > N$, das heißt, beachten Sie die besondere Struktur der Matrix $R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 13 (schriftlich - 10 Punkte) (Ausgleichsproblem)
Ein Student stellt die Hypothese auf, dass die Änderung von einem Fass seines Lieblingsbiers (in Euro) im Wesentlichen eine Linearkombination der Änderung des Preises eines 50-Kilo-Sacks Malz (in Euro) und der Änderung eines Kilogramms Hefe (in Euro) ist. Für drei aufeinanderfolgende Jahre sind folgende Daten gegeben:

	Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3
Änderung des Bierpreises B (pro Fass)	+ 1 €	− 1 €	+ 2 €
Änderung des Malzpreises M (pro 50-Kilo-Sack)	+ 2 €	− 1 €	0 €
Änderung des Hefepreises H (pro Kilogramm)	0 €	− 1 €	+ 1 €

Schätzen Sie durch Aufstellen und Lösen eines linearen Ausgleichsproblems (unter Verwendung der Tabelle) für das Modell $B = \alpha M + \beta H$ die Änderung des Bierpreises in Jahr 4, falls der Malzpreis um 1 € sinkt und der Hefepreis um 1 € steigt.

Aufgabe 14 (Polarzerlegung)
Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ regulär. Zeigen Sie ohne Hilfe der Singulärwertzerlegung:

(a) es existiert eine eindeutige Zerlegung $A = QU$ mit $Q \in \mathbb{R}^{N\times N}$ orthogonal und $U \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch positiv definit.

(b) es existiert eine eindeutige Zerlegung $A = VP$ mit $V \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch positiv definit und $P \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ist orthogonal.

(c) Es gilt $P = Q$.

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **Montag, den 03. Dezember 2012, 13.00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerische Mathematik 1** im 1.OG des C-Teils des ehemaligen Allianz-Gebäudes einzuwerfen (Kaiserstraße 93). Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer**, sowie die zugehörige **Tutorengruppe** (A-D) und heften Sie die Blätter zusammen.

Service/Material:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa12012w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch aktuelle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Dienstag, 09.30-10.30 Uhr und nach Vereinbarung
Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer: Mittwoch, 14.30-15.30 Uhr und nach Vereinbarung