Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer

Numerische Mathematik 1 — Übungsblatt 4 vom 03. Dez. 2012

Wintersemester 2012/13

Aufgabe 15 (schriftlich - 6 Punkte) (Singulärwertzerlegung)
Zeigen Sie mithilfe der Singulärwertzerlegung, dass für beliebiges $A \in \mathbb{R}^{K\times N}$ die Matrizen $A^TA \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und $AA^T \in \mathbb{R}^{K\times K}$ dieselben Eigenwerte ungleich 0 besitzen.

Aufgabe 16 (schriftlich - 8 Punkte) (Tikhonov-Regularisierung)
Betrachten Sie zu $A \in \mathbb{R}^{K\times N}$ und $b \in \mathbb{R}^K$ die Tikhonov-Regularisierung

$$F_\alpha(x) := \frac{1}{2}|Ax-b|_2^2 + \frac{\alpha}{2}|x|_2^2 = \min!$$

mit dem Regularisierungsparameter $\alpha \geq 0$. Zu festem α sei die Lösung der Minimierungsaufgabe mit $x^\alpha \in \mathbb{R}^N$ bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) Die Folge $F_\alpha(x^\alpha)$ ist für $\alpha \to 0$ monoton fallend und nach unten beschränkt.

(b) Die Folge x^α ist beschränkt und es gilt $|x^\alpha|_2 \leq |x^+|_2$ für alle $\alpha \geq 0$, wobei $x^+ = A^+b$ die Minimum-Norm-Lösung ist.

Aufgabe 17 (schriftlich - 8 Punkte) (Frobeniusnorm)
Die Frobeniusnorm (oder auch Hilbert-Schmidt-Norm) in $\mathbb{R}^{K\times N}$ ist gegeben durch $\|A\|_F^2 = \sum_{k=1}^K\sum_{n=1}^N |a_{kn}|^2$ und die Spur einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ist definiert durch $\mathrm{spur}(B) = \sum_{n=1}^N b_{nn}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\mathrm{spur}(AB) = \mathrm{spur}(BA)$ für alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{K\times N}$, $B \in \mathbb{R}^{N\times K}$.

(b) Es gilt $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{spur}(A^TA)}$.

(c) Für beliebiges $A \in \mathbb{R}^{K\times N}$ und alle orthogonalen Matrizen $U \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $V \in \mathbb{R}^{K\times K}$ gilt $\|VAU\|_F = \|A\|_F$.

(d) Der Rang von $A \in \mathbb{R}^{K\times N}$ sei $R \leq \min\{K,N\}$ und die Singulärwerte von A seien mit $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_R > 0$ bezeichnet. Dann gilt $\|A\|_F^2 = \sum_{n=1}^R \sigma_n^2$.

(e) Die Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ seien mit $\lambda_1,\dots,\lambda_N \in \mathbb{C}$ bezeichnet. Dann gilt $\sum_{n=1}^N |\lambda_n|^2 \leq \|A\|_F^2$.

Hinweis: Verwenden Sie für Aufgabenteil (e) die
Schur-Faktorisierung: Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ist ähnlich zu einer Dreiecksmatrix, wobei die Transformationsmatrix $Q \in C^{N\times N}$ unitär gewählt werden kann, das heißt $Q^{-1} = Q^H$.

Aufgabe 18 (schriftlich - 8 Punkte) (Veränderung der Eigenwerte bei Störung)
Betrachten Sie das symmetrische Eigenwertproblem $Ax = \lambda x$, wobei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch. Die Eigenwerte/-vektoren seien mit $\lambda_1,\dots,\lambda_N \in \mathbb{R}$ und $v^1,\dots,v^N \in \mathbb{R}^N$ bezeichnet.

(a) Die Vektoren $u,w \in \mathbb{R}^N$ mit $u \neq 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ mögen die Gleichung $(A-\mu I_N)u = w$ erfüllen. Zeigen Sie, dass es dann ein $\lambda_n \in \sigma(A)$ gibt, so dass $|\lambda_n - \mu| \leq \frac{|w|_2}{|u|_2}$ gilt.

(b) Es sei $\Delta A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch und $\mu \in \mathbb{R}$ sei ein Eigenwert von $A + \Delta A$. Zeigen Sie, dass es dann ein $\lambda_n \in \sigma(A)$ gibt, so dass $|\lambda_n - \mu| \leq \|\Delta A\|_2$.

Aufgabe 19 (Rayleigh-Quotient)
Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch und $M \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch und positiv definit. Zu A und M ist der verallgemeinerte Rayleigh-Quotient für $0 \neq x \in \mathbb{R}^N$ definiert durch $r(A,M,x) = \frac{x^TAx}{x^TMx}$. Berechnen Sie für festes A und M die Ableitung $\partial_x r(A,M,x)$ des Rayleigh-Quotienten und zeigen Sie dass im Falle $M = I_N$ gilt:

$$\partial_x r(A,I_N,x) = 0_N^T \quad \Longleftrightarrow \quad r(A,I_N,x) \text{ ist Eigenwert von } A.$$

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **Montag, den 17. Dezember 2012, 13.00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerische Mathematik 1** im 1.OG des C-Teils des ehemaligen Allianz-Gebäudes einzuwerfen (Kaiserstraße 93). Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer**, sowie die zugehörige **Tutorengruppe** (A-D) und heften Sie die Blätter zusammen.

Service/Material:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa12012w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch aktuelle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Dienstag, 09.30-10.30 Uhr und nach Vereinbarung
Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer: Mittwoch, 14.30-15.30 Uhr und nach Vereinbarung