

**Numerische Mathematik 1**      **Übungsblatt 5 vom 17. Dez. 2012**  
 Wintersemester 2012/13

**Aufgabe 20** (LR-Zerlegung)  
 Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{R} & v \\ u^T & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)},$$

mit  $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  reguläre obere Dreiecksmatrix und  $u, v \in \mathbb{R}^N$ .

- (a) Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung von  $A$ .
- (b) Zeigen Sie:  $A$  ist regulär  $\iff u^T \tilde{R}^{-1} v \neq 0$ .

**Aufgabe 21 (schriftlich - 8 Punkte)** (Eigenschaften einer spd-Matrix)  
 Sei  $A = (a_{jk}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie:

- (a)  $a_{jj} > 0 \quad j = 1, 2, \dots, N$ ,
- (b)  $a_{jk}^2 < a_{jj} a_{kk} \quad j, k = 1, 2, \dots, N, j \neq k$ ,
- (c) der betragsmäßig größte Eintrag von  $A$  liegt auf der Hauptdiagonalen.

**Aufgabe 22 (schriftlich - 12 Punkte)** (Ausgleichsproblem)  
 Gegeben seien Messwerte  $y_i$  zu Stützstellen  $x_i, i = 0, 1, 2$ :

$x_i$	-2	-1	1
$y_i$	1	0	0

- (a) Bestimmen Sie die Ausgleichsparabel der Bauweise

$$y = p(x) = ax + bx^2$$

indem Sie das entsprechende Normalgleichungssystem lösen.

- (b) Wie ändert sich die rechte Seite des Normalgleichungssystems aus a) wenn für  $x_2 = 1$  ein Wert  $y_2 = t \neq 0$  vorliegt? Welcher relative Fehler in der 2-Norm ist für die Lösung des Normalgleichungssystems maximal zu erwarten, wenn nun das Normalgleichungssystem mit der neuen rechten Seite gelöst wird?

**Aufgabe 23 (schriftlich - 6 Punkte)** (Sherman-Morrison-Formel)  
 Sei  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  regulär und  $u, v \in \mathbb{R}^N$ . Zeigen Sie:

- (a) Für  $v^T A^{-1} u \neq -1$  gilt

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}.$$

- (b) Falls  $v^T A^{-1} u = -1$ , so ist die Matrix  $A + uv^T$  singulär.

**Aufgabe 24 (schriftlich - 4 Punkte)** (Gerschgorin)  
 Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen und zeichnen Sie die Gerschgorin-Kreise zu dieser Matrix und bestimmen Sie die Eigenwerte. Zeigen Sie damit, dass nicht in jedem Gerschgorin-Kreis ein Eigenwert liegen muss!

# Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Jahr 2013!

**Abgabe der Übungsblätter:**

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **Montag, den 07. Januar 2013, 13.00 Uhr** in den Einwurfschlitzen **Numerische Mathematik 1** im 1.OG des C-Teils des ehemaligen Allianz-Gebäudes einzuwerfen (Kaiserstraße 93). Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer**, sowie die zugehörige **Tutorengruppe** (A-D) und heften Sie die Blätter zusammen.

**Service/Material:**

Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa12012w/> finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch aktuelle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.

**Sprechstunden:**

Prof. Dr. Christian Wieners: Dienstag, 09.30-10.30 Uhr und nach Vereinbarung  
 Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer: Mittwoch, 14.30-15.30 Uhr und nach Vereinbarung