Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer

Numerische Mathematik 1 — Übungsblatt 6 vom 07. Jan. 2013

Wintersemester 2012/13

Aufgabe 25 (schriftlich - 10 Punkte) (Gerschgorin)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie mit dem Satz von Gerschgorin Näherungen für die Eigenwerte der Matrix A, indem Sie eine Skizze anfertigen. Können Sie die Eigenwerte weiter eingrenzen?

(b) Transformieren Sie A mit einer Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(\alpha, 1, \alpha)$ mit $\alpha \neq 0$ so, dass die Gerschgorin-Kreise von $B = D^{-1}AD$ voneinander getrennt sind. Welche Abschätzungen für die Eigenwerte von A erhalten Sie?

(c) Zeigen Sie, dass die Matrix A nur reelle Eigenwerte besitzt, ohne diese explizit zu bestimmen.

Aufgabe 26 (schriftlich - 10 Punkte) (Gesamtschritt- und Einzelschrittverfahren)
Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ besitzt die Darstellung $A = D + L + U$ mit $D = \mathrm{diag}(A)$, $L = \mathrm{lower}(A)$ und $U = \mathrm{upper}(A)$. Betrachten Sie zu $b \in \mathbb{R}^N$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Das Gesamtschrittverfahren (GSV) und das Einzelschrittverfahren (ESV) sind ausgehend von $x^0 \in \mathbb{R}^N$ für $k > 0$ durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} &(GSV) \qquad x^{k+1} = x^k + D^{-1}(b - Ax^k)\,, \\ &(ESV) \qquad x^{k+1} = x^k + (D+L)^{-1}(b - Ax^k)\,, \end{aligned}$$

gegeben. Zudem sei die Matrix A strikt diagonaldominant, d.h. es gilt $|A[n,n]| > \sum_{k=1,k\neq n}^{N} |A[n,k]|$ für alle $n = 1,\dots,N$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\|I_N - D^{-1}A\|_\infty < 1$ und das Gesamtschrittverfahren konvergiert.

(b) Es gilt $\|I_N - (D+L)^{-1}A\|_\infty \leq \|I_N - D^{-1}A\|_\infty$ und das Einzelschrittverfahren konvergiert.

Aufgabe 27 (symmetrisches Iterationsverfahren)
Seien $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch und regulär, sowie $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ gegeben. Betrachten Sie für $k = 0, 1, 2, \dots$ die Iteration

$$\begin{aligned} x^{k+1/2} &= x^k + B(b - Ax^k), \\ x^{k+1} &= x^{k+1/2} + B^T(b - Ax^{k+1/2})\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass (1) einer Iteration

$$x^{k+1} = x^k + \hat{B}(b - Ax^k) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

mit symmetrischem $\hat{B}$ entspricht, indem Sie $\hat{B}$ bestimmen.

Aufgabe 28 (schriftlich - 10 Punkte) (Gesamtschrittverfahren)
Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch positiv definit und $D = \mathrm{diag}(A)$. Zeigen Sie: Wenn $2D - A$ positiv definit ist, dann konvergiert das Jacobi-Verfahren

$$x^{k+1} = x^k + D^{-1}(b - Ax^k)$$

in der Euklidischen Norm. Finden Sie eine Matrix, die diesen Voraussetzungen genügt und für die

$$\|I - D^{-1}A\|_2 > 1$$

gilt.

Hinweis: Verwenden Sie die Energienorm $|x|_A = \sqrt{x^TAx}$

Abgabe der Übungsblätter:
Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **Montag, den 21. Januar 2013, 13.00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerische Mathematik 1** im 1.OG des C-Teils des ehemaligen Allianz-Gebäudes einzuwerfen (Kaiserstraße 93). Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer**, sowie die zugehörige **Tutorengruppe** (A-D) und heften Sie die Blätter zusammen.

Service/Material:
Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa12012w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch aktuelle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Dienstag, 09.30-10.30 Uhr und nach Vereinbarung
Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer: Mittwoch, 14.30-15.30 Uhr und nach Vereinbarung