Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer

Numerische Mathematik 1 — Übungsblatt 7 vom 21. Jan. 2013

Wintersemester 2012/13

Aufgabe 29 (schriftlich - 12 Punkte) (Krylovräume)
Zu einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und dem Vektor $b \in \mathbb{R}^N$ definieren wir den k-ten Krylov-Raum

$$\mathcal{K}_k(A,b) = \mathrm{span}\{b, Ab, \dots, A^{k-1}b\}\,.$$

Zudem sei $x \in \mathbb{R}^N$ Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$. Zeigen Sie, dass dann folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) Die Vektoren $b, Ab, \dots, A^k b$ sind linear abhängig.

(2) Es gilt $\mathcal{K}_k(A,b) = \mathcal{K}_{k+1}(A,b)\,.$

(3) Es gilt $A\mathcal{K}_k(A,b) \subset K_k(A,b)$, d.h. für alle $y \in \mathcal{K}_k(A,b)$ gilt $Ay \in \mathcal{K}_k(A,b)$.

(4) es existiert ein linearer Unterraum $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ mit $\dim \mathcal{M} \le k$, für den $b \in \mathcal{M}$ gilt und der bezüglich der Matrix A invariant ist, also $A\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$

(5) Es gilt $x \in \mathcal{K}_k(A,b)$.

Hinweis Beweisen Sie die Äquivalenz über
(1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (1), (3) ⇒ (5) ⇒ (1).

Bemerkung: Analoge Aussagen gelten auch mit einem regulären Vorkonditionierer B im Krylov-Raum $\mathcal{K}_k(BA, Bb)$.

Aufgabe 30 (schriftlich - 10 Punkte) (CG-Verfahren)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine symmetrische positiv definite Matrix und $b \in \mathbb{R}^N$. Die Anwendung des CG-Verfahrens (ohne Vorkonditionierung, d.h. $B = I_N$) zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit Startwert $x^0 = 0$ führt zu folgenden Eigenschaften:

(a) Die Iterierten x^k haben die Form $x^k = Q_{k-1}(A)b$ für ein $Q_{k-1} \in \mathbb{P}_{k-1}$.

(b) Die Residuen $r^k = b - Ax^k$ haben die Form $r^k = P_k(A)b$ mit $P_k \in \mathbb{P}_k$ und $P_k(t) = 1 - tQ_{k-1}(t)$.

Aufgabe 31 (schriftlich - 8 Punkte) (Newton-Verfahren)
Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem im $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} uv + u - v - 1 &= 0,\\ uv &= 0\,. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die exakten Lösungen dieses nichtlinearen Gleichungssystems.

(b) Führen Sie für die Startwerte

$$\begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jeweils den ersten Iterationsschritt des Newton-Verfahrens durch.

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **Montag, den 04. Februar 2013, 13.00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerische Mathematik 1** im 1.OG des C-Teils des ehemaligen Allianz-Gebäudes einzuwerfen (Kaiserstraße 93). Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer**, sowie die zugehörige **Tutorengruppe** (A-D) und heften Sie die Blätter zusammen.

Service/Material:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa12012w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch aktuelle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Dienstag, 09.30-10.30 Uhr und nach Vereinbarung
Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer: Mittwoch, 14.30-15.30 Uhr und nach Vereinbarung