

Numerische Mathematik 1

Wintersemester 2014/15

Programmierblatt 6

Aufgabe 13 (LR-Zerlegung / Cholesky-Zerlegung)

Das Ziel dieser Aufgabe ist es ein Gleichungssystem $Ax = b$ effizient zu lösen. Dabei ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch

$$A = (a_{ij}) \quad \text{mit} \quad a_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{j}, & \text{falls } |i-j| \leq p, j \geq i \\ \frac{j}{i}, & \text{falls } |i-j| \leq p, i > j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben, wobei der Parameter $0 \leq p \leq n-1$ die Bandbreite der Matrix A bestimmt. Der Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ ist durch

$$b = (b_i) \quad \text{mit} \quad b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

gegeben.

(a) Schreiben Sie MATLAB-Funktionen

$$A = \text{LRdecompBand}(A, p) \quad \text{und} \quad x = \text{LRsolveBand}(LR, b, p)$$

(vgl. Aufgabe 12), in denen eine LR-Zerlegung ohne Pivotisierung von A berechnet wird und das Gleichungssystem $Ax = b$ durch Vorwärts- und Rückwärtselimination bestimmt wird. In beiden Programmen soll die spezielle Bandstruktur der Matrix A dadurch ausgenutzt werden, dass nur über die Elemente iteriert wird, die auch einen Beitrag zum Ergebnis liefern.

(b) Schreiben Sie ein MATLAB-Skript, in welchem Sie die Laufzeit der beiden Algorithmen aus (a) mit den Algorithmen aus Aufgabe 12 vergleichen. Verwenden Sie dazu $n = 50, 100, 200, 400, 800$ sowie $p = 2, 4, 8, 16, 32$ und plotten Sie die Laufzeit in Abhängigkeit von n und p .

Hilfreiche Befehle: tic, toc

Im Fall $p = n-1$ ist die Matrix A voll besetzt. Daher haben beide LR-Zerlegungen dieselbe Laufzeit. Dennoch kann das Gleichungssystem effizient gelöst werden, da A in diesem Fall symmetrisch und positiv definit ist.

(c) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

$$L = \text{CholDec}(A),$$

welche die Cholesky-Zerlegung einer Matrix A berechnet. Vergleichen Sie für $n = 50, 100, 200, 400, 800$ die Laufzeit der Cholesky-Zerlegung mit der LR-Zerlegung. Plotten Sie Ihr Ergebnis.

Die Aufgaben werden am **Donnerstag, den 29. Januar 2015, 15:45 Uhr** und am **Montag, den 2. Februar 2015, 09:45 Uhr** in den Programmierkursen besprochen.

Homepage:

Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa12014w/> erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.