Stabilität numerischer Rechnungen

Tobias Jahnke and Marcel Mikl

Karlsruher Institut für Technologie

Numerische Mathematik 1

Wintersemester 2014/15

Beispiel 1: Approximation der Eulerschen Zahl e

Die Formel

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

soll verwendet werden, um die Eulersche Zahl zu approximieren.

MATLAB-Programm:

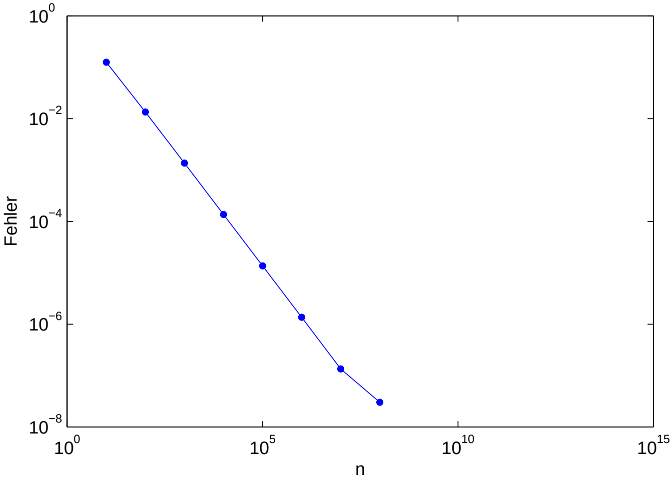
```
% Approximation an die Eulersche Zahl
clear all
clc
fprintf('n        Approximation             Fehler \n\n')
for i=1:16
   n=10^i;
   e=(1+1/n)^n;
   fprintf('10^%-2d\t %20.15f\t %20.15f\n',i,e,e-exp(1));
end
```

n	Approximation	Fehler
10^1	2.593742460100002	-0.124539368359043
10^2	2.704813829421529	-0.013467999037517
10^3	2.716923932235594	-0.001357896223452
10^4	2.718145926824926	-0.000135901634120
10^5	2.718268237192298	-0.000013591266748
10^6	2.718280469095753	-0.000001359363292
10^7	2.718281694132082	-0.000000134326964
10^8	2.718281798347358	-0.000000030111688

n	Approximation	Fehler
10^1	2.593742460100002	-0.124539368359043
10^2	2.704813829421529	-0.013467999037517
10^3	2.716923932235594	-0.001357896223452
10^4	2.718145926824926	-0.000135901634120
10^5	2.718268237192298	-0.000013591266748
10^6	2.718280469095753	-0.000001359363292
10^7	2.718281694132082	-0.000000134326964
10^8	2.718281798347358	-0.000000030111688
10^9	2.718282052011560	0.000000223552515
10^10	2.718282053234788	0.000000224775742
10^11	2.718282053357110	0.000000224898065
10^12	2.718523496037238	0.000241667578192
10^13	2.716110034086901	-0.002171794372145
10^14	2.716110034087023	-0.002171794372023
10^15	3.035035206549262	0.316753378090216
10^16	1.000000000000000	-1.718281828459046

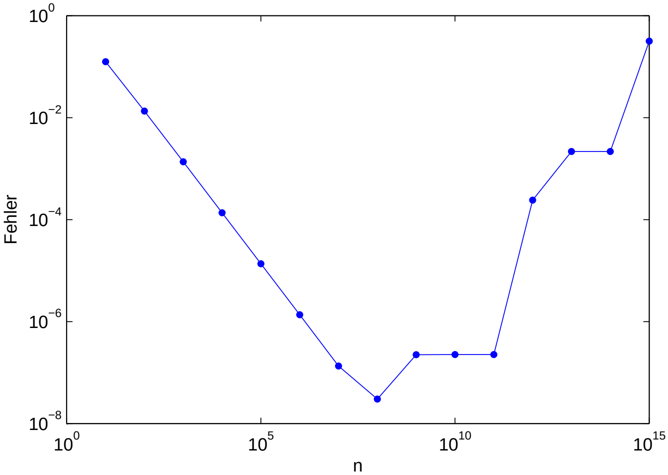
Beobachtung: Bis $n = 10^8$ wird die Approximation immer genauer, doch für größere n wächst der Fehler wieder. Warum?

Fehler der Approximation $e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n = 10, 100, 1000, \ldots$



Beobachtung: Bis $n = 10^8$ wird die Approximation immer genauer, doch für größere n wächst der Fehler wieder. Warum?

Fehler der Approximation $e \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für $n = 10, 100, 1000, \ldots$



Beobachtung: Bis $n = 10^8$ wird die Approximation immer genauer, doch für größere n wächst der Fehler wieder. Warum?

Beispiel 2: Dreitermrekursion

Betrachte die Dreitermrekursion

$$x_{n+1} = \lambda x_n - (\lambda - 1)x_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad x_0 = x_{-1} = \pi$$

Dann gilt $x_n = \pi$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bei beliebigem $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2: Dreitermrekursion

Betrachte die Dreitermrekursion

$$x_{n+1} = \lambda x_n - (\lambda - 1)x_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad x_0 = x_{-1} = \pi$$

Dann gilt $x_n = \pi$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bei beliebigem $\lambda \in \mathbb{R}$.

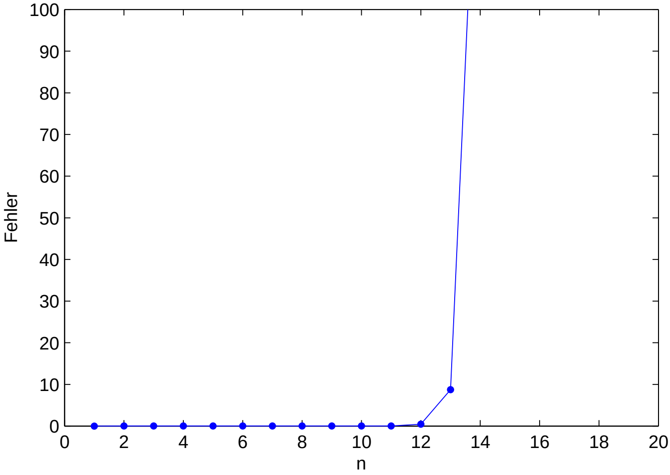
MATLAB-Programm:

```
clc; clear all hidden; close all hidden

N=20; lam=20;
xalt=pi; x=pi;
xwerte=zeros(N,1);

for n=1:N
    xneu=lam*x - (lam-1)*xalt;
    xwerte(n)=xneu;
    xalt=x; x=xneu;
end
```

Fehler $|x_n - \pi|$ der Dreitermrekursion:



Beobachtung: Schon ab ca. $n = 13$ wird das Ergebnis völlig falsch!

Warum?

Stabilität numerischer Rechnungen

Tobias Jahnke and Marcel Mikl

Karlsruher Institut für Technologie

Numerische Mathematik 1

Wintersemester 2014/15