

Numerische Mathematik 1

Wintersemester 2014/15

Tutorium 2

Aufgabe 4 (Integration mit Gewichtsfunktion)

Ziel dieser Aufgabe ist es, einen Vorteil von Integration mit Gewichtsfunktion an einem konkreten Beispiel zu untersuchen. Betrachten Sie dazu das Integral

$$\int_{-1}^1 f(x) dx, \quad \text{für } f(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

- (i) Bestimmen Sie den Wert des Integrals zunächst mit der zweistufigen Gauß-Quadratur. Diese ist durch die Gewichte $b_1 = b_2 = 1$ und die Knoten $c_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$, $c_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ gegeben.

Bemerkung: Die Knoten und Gewichte sind bereits an das Intervall angepasst.

- (ii) Um eine bessere Approximation des Integrals zu erhalten verwenden wir die Gewichtsfunktion

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Schreiben Sie das Integral in der Form

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 w(x) \tilde{f}(x) dx.$$

Verwenden Sie dann die zweistufige Gauß-Quadraturformel für Integrale mit der Gewichtsfunktion $w(x)$. Diese ist durch die Gewichte $b_1 = b_2 = \frac{\pi}{2}$ und die Knoten $c_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $c_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ gegeben.

Was fällt Ihnen auf? Wie erklären Sie diesen Unterschied?

Aufgabe 5 (Fehlerabschätzung Simpsonregel)

- (a) Geben Sie die Definition des Peano-Kerns $K_p(\tau)$ an.
(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 |K_4(\tau)| d\tau = \frac{1}{2880}$$

gilt und leiten Sie daraus eine Fehlerabschätzung für die Simpsonregel her. Welche Regularität müssen Sie voraussetzen?

Hinweis: Überlegen Sie zunächst, ob es eine Abkürzung zur Berechnung gibt.

Aufgabe 6 (Identität von Christoffel-Darboux)

Sei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ und $\phi_k(t)$ eine Folge bezüglich des L^2 -Skalarprodukts orthonormaler Polynome. Zeigen Sie die Identität

$$\sum_{k=0}^n \phi_k(x) \phi_k(y) = \beta_{n+1} \frac{\phi_{n+1}(x) \phi_n(y) - \phi_n(x) \phi_{n+1}(y)}{x - y},$$

wobei β_{n+1} der Koeffizient aus der dreigliedrigen Rekursionsformel für orthonormal Polynome ist.

Die Aufgaben werden am

- **Donnerstag, den 13. November 2014, 15:45 Uhr,**
- **Freitag, den 14. November 2014, 15:45 Uhr,**
- **Montag, den 17. November 2014, 11:30 Uhr,**
- **Mittwoch, den 19. November 2014, 08:00 Uhr**

in den Theoretutorien besprochen.

Homepage:

Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa12014w/> erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.