

## Numerische Mathematik 1

Wintersemester 2014/15

## Tutorium 5

### Aufgabe 12 (Submultiplikativität)

In der Vorlesung wurde für zwei Vektornormen  $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n}$  und  $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^m}$  auf  $\mathbb{K}^n$  bzw.  $\mathbb{K}^m$  die induzierte Matrixnorm  $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m}$  eingeführt.

Sei  $\|\cdot\|$  eine induzierte Matrixnorm. Zeigen Sie:

- Für die Einheitsmatrix  $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt  $\|I_n\| = 1$ .
- $\|\cdot\|$  ist submultiplikativ. Das heißt, für Matrizen  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  und  $B \in \mathbb{K}^{n \times l}$  gilt  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ .

### Aufgabe 13 (Matrixnormen)

- Betrachte für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  die Abbildung  $\|A\|_{\tilde{G}} = \max_{i,j} |a_{ij}|$ . Zeigen Sie
  - $\|\cdot\|_{\tilde{G}}$  ist eine Matrixnorm.
  - $\|\cdot\|_{\tilde{G}}$  ist nicht submultiplikativ (Gegenbeispiel).
  - $\|\cdot\|_G = \sqrt{mn} \|\cdot\|_{\tilde{G}}$  ist eine submultiplikative Matrixnorm.
- Gegeben Sei die Matrix  $M = uu^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , wobei  $u = [1, 2, \dots, n]^T \in \mathbb{R}^n$ . Bestimmen Sie die Matrixnormen  $\|M\|_1$ ,  $\|M\|_\infty$  und  $\|M\|_2$ .

### Aufgabe 14 (Konditionszahl)

In der Vorlesung wurde die Konditionszahl  $\kappa(F, x)$  einer in  $x$  differenzierbaren Funktion  $F$  eingeführt. Damit lässt sich nun die Kondition verschiedener mathematischer Probleme Berechnen. Bestimmen Sie die Kondition der Summation von  $n$  reellen Zahlen  $x_1, \dots, x_n$ . Betrachten Sie dazu

$$F: (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad F(x) = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Interpretieren Sie das Ergebnis. Stichwort: Auslöschung.

---

Die Aufgaben werden am

- **Donnerstag, den 8. Januar 2015, 15:45 Uhr,**
- **Freitag, den 9. Januar 2015, 15:45 Uhr,**
- **Montag, den 12. Januar 2015, 11:30 Uhr,**
- **Mittwoch, den 14. Januar 2015, 08:00 Uhr**

in den Theorietutorien besprochen.

#### Homepage:

Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa12014w/> erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.