Numerische Mathematik 1

Wintersemester 2014/15

Tutorium 7

Aufgabe 18 (Lineares Ausgleichsproblem)
Gegeben seien die drei Punkte

x_i	0	2	4
y_i	1	1	4

(a) Bestimmen Sie die Gerade $y = a_0 + a_1 x$, welche die drei Punkte im Sinne der linearen Ausgleichsrechnung approximiert.

(b) Veranschaulichen Sie die Situation in einer Grafik.

Aufgabe 19 (Lineares Ausgleichsproblem)
Um die *Black Box* eines über dem Meer verunglückten Flugzeugs zu finden, werden fünf Suchboote eingesetzt. Mithilfe dieser Boote soll über das von der *Black Box* ausgesendete Notsignal ihr Standort ermittelt werden. In der nachfolgenden Tabelle ist die Position der Suchboote in einem (x, y)-Koordinatensystem angegeben. Zusätzlich ist für jedes Boot der Tangenswert des Richtungswinkels α gegeben, aus dem es das Notsignal empfängt.

Suchboot	1	2	3	4	5
x-Koordinate	8	22	36	10	13
y-Koordinate	0	7	18	20	10
tan α	1	-0.5	0.5	-1	0

(a) Stellen Sie die Situation anhand einer Skizze dar.

(b) Bestimmen Sie die mutmaßlichen Koordinaten der *Black Box*.

Hinweise: $\arctan(1) = 45°$, $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26{,}5°$, $\tan \alpha_i = \frac{y - y_i}{x - x_i}$

Aufgabe 20 (Householder-Transformation)
Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ sei die Householder-Transformation

$$Q = I - \frac{2}{v^T v} v v^T$$

gegeben. Zeigen Sie:

(a) Q ist symmetrisch und Q ist orthogonal.

(b) Q besitzt den Eigenwert 1 mit Vielfachheit $n-1$ und den Eigenwert -1 mit Vielfachheit 1.

Aufgabe 21 (QR-Zerlegung)
Sei die Matrix A und der Vektor b durch

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 0 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie mittels Householder-Transformationen eine QR-Zerlegung der Matrix A. Geben Sie dabei die Matrizen Q und R explizit an.

(b) Verwenden Sie die QR-Zerlegung aus (a) zur Lösung von $Ax = b$.

Aufgabe 22 (QR-Zerlegung)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine injektive Matrix.

(a) Zeigen Sie, dass $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit ist.

(b) Verwenden Sie die Cholesky-Zerlegung $A^T A = LL^T$ von $A^T A$, um eine QR-Zerlegung der Matrix A herzuleiten.

Aufgabe 23 (Singulärwertzerlegung)
Sei die Matrix A und der Vektor b durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix A.

(b) Verwenden Sie die Zerlegung aus (a) zur Bestimmung der kleinste Quadrate Lösung von $||b - Ax|| = \min!$ mit minimaler Norm.

Die Aufgaben werden am

- **Donnerstag, den 5. Februar 2015, 15:45 Uhr**,
- **Freitag, den 6. Februar 2015, 15:45 Uhr**,
- **Montag, den 9. Februar 2015, 11:30 Uhr**,
- **Mittwoch, den 11. Februar 2015, 08:00 Uhr**

in den Theorietutorien besprochen.

Homepage:
Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa12014w/ erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.