

Numerische Mathematik 1

Wintersemester 2014/15

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (Quadraturformeln)

In dieser Aufgabe geht es darum, die Funktionsweise von Quadraturformeln an einem konkreten Beispiel zu verstehen. Wir betrachten dazu das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx.$$

- Berechnen Sie den Wert des Integrals analytisch.
- Berechnen Sie den Wert des Integrals mit der Trapezregel.
- Berechnen Sie den Wert des Integrals mit der zusammengesetzten Trapezregel auf den Teilintervallen $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_3]$ und $[x_3, x_4]$. Was ist der Vorteil äquidistanter Knotenpunkte?
- Berechnen Sie den Wert des Integrals mit der zusammengesetzten Trapezregel auf den Teilintervallen $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ und $[x_3, x_4]$.
- Berechnen Sie den Wert des Integrals mit der Simpsonregel. Ist es möglich den Wert des Integrals mit der zusammengesetzten Simpsonregel auf den Teilintervallen $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$ zu berechnen?

j	0	1	2	3	4
x_j	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x_j)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Aufgabe 2 (Lagrange-Polynome)

Seien die Knoten $c_1 < c_2 < \dots < c_s$ gegeben.

- Geben Sie die Definition der zugehörigen *Lagrange*-Polynome ℓ_j für $j = 1, \dots, s$ an.
- Sei nun konkret $s = 3$ und die Knoten $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$ gegeben. Bestimmen Sie die zugehörigen *Lagrange*-Polynome und skizzieren Sie diese.
- Zeigen Sie, dass die zugehörigen *Lagrange*-Polynome ℓ_j , $j = 1, \dots, s$ eine Basis von \mathcal{P}_{s-1} bilden.

Aufgabe 3 (Ordnungsbedingungen)

Beweisen Sie Korollar 1.8 aus der Vorlesung:

Eine Quadraturformel $(b_j, c_j)_{j=1}^s$ zur Approximation von $\int_a^b \omega(x)f(x)dx$ hat Ordnung p genau dann, wenn

$$\sum_{j=1}^s b_j c_j^{q-1} = \int_0^1 \omega(t)t^{q-1} dt, \quad \text{für } q = 1, \dots, p$$

gilt.

Die Aufgaben werden am **Mittwoch, den 29. Oktober 2014, 09:45 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

Homepage:

Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa12014w/> erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.