Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl

Numerische Mathematik 1

Wintersemester 2014/15

Übungsblatt 2

Aufgabe 4 (Gauß-Lobatto Quadratur)
Konstruieren Sie, ausgehend von der Idee der Gauß-Quadratur, eine s-stufige Quadraturformel maximaler Ordnung, bei der die Knoten $c_1 = 0$ und $c_s = 1$ fest vorgegeben sind. Eine solche Quadraturformel hat die Gestalt

$$\int_0^1 f(t)dt = b_1 f(0) + \sum_{j=2}^{s-1} b_j f(c_j) + b_s f(1)\,.$$

Begründen Sie dabei Ihr Vorgehen anhand der Sätze aus der Vorlesung.
Welche Ordnung hat Ihre Formel?

Aufgabe 5 (Trennungseigenschaft)
Seien $c_1^{(s)}, \ldots, c_s^{(s)}$ die Knoten der Gauß-Quadraturformel der Ordnung $2s$ und $c_1^{(s+1)}, \ldots, c_{s+1}^{(s+1)}$ die Knoten der Gauß-Quadraturformel der Ordnung $2s+2$.
Zeigen Sie, dass die Knoten die Trennungseigenschaft

$$0 < c_1^{(s+1)} < c_1^{(s)} < c_2^{(s+1)} < c_2^{(s)} < \ldots < c_s^{(s)} < c_{s+1}^{(s+1)} < 1$$

erfüllen.
Hinweis:
Betrachten Sie die Nullstellen $\lambda_i^{(s)}$ von P_s und schließen Sie auf die Vorzeichen von $P_{s-1}(\lambda_i^{(s)})$ und $P_{s+1}(\lambda_i^{(s)})$.
Für die Legendre-Polynome P_k gilt die Rekursionsvorschrift

$$P_{k+1}(x) = \frac{(2k+1)}{k+1} x P_k(x) - \frac{k}{k+1} P_{k-1}(x)\,, \quad P_0(x) = 1\,, \quad P_1(x) = x\,.$$

Aufgabe 6 (Gewichte einer Quadraturformel)
Sei $w(x)$ eine positive Gewichtsfunktion mit endlichen Momenten und sei durch $(b_i, c_i)_{i=1}^s$ eine Quadraturformel mit der Eigenschaft

$$\int_a^b w(x)p(x)dx = \sum_{j=1}^{s} b_j p(c_j)\,, \quad \forall p \in \mathcal{P}_{2s-1}\,,$$

gegeben.
Sei $\phi_k \in \mathcal{P}_k$ das k-te Orthogonalpolynom bezüglich des gewichteten Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx\,.$$

mit dem Höchstkoeffizienten eins (d.h. $\phi_k(x) = x^k + \ldots$).
Zeigen Sie, dass für die Gewichte der Quadraturformel der Zusammenhang

$$b_k = \frac{\langle \phi_{s-1}, \phi_{s-1}\rangle}{\phi_s'(c_k)\phi_{s-1}(c_k)}\,, \quad k = 1\ldots, s$$

gilt.
Hinweis: Auch für die Polynome ϕ_k gilt die Trennungseigenschaft (vgl. Aufgabe 5).

Die Aufgaben werden am **Mittwoch, den 12. November 2014, 09:45 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

Homepage:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa12014w/ erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.