

Numerische Mathematik 1

Wintersemester 2014/15

Übungsblatt 3

Aufgabe 7 (Hermite-Interpolation)

Bei der Hermite-Interpolation wird ein Polynom p bestimmt, das an den Knoten nicht nur vorgegebene Funktionswerte, sondern auch vorgegebene Ableitungen hat.

- (a) Ableitungen an Knoten lassen sich als spezielle dividierte Differenzen interpretieren. Seien die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) mit $x_2 = x_1 + \varepsilon$ gegeben. Untersuchen Sie

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta y[x_1, x_2].$$

Was fällt Ihnen auf?

Mit der Taylorentwicklung lässt sich der allgemeinere Zusammenhang

$$\delta^k y[\underbrace{x_j, \dots, x_j}_{(k+1)\text{-mal}}] = \frac{1}{k!} y_j^{(k)}, \quad k \geq 0$$

zeigen.

- (b) Verwenden Sie ein Newton-Schema mit geeigneter Modifikation, um das Interpolationspolynom aus den Daten

x_j	y_j	y'_j	y''_j	y'''_j
1	-5	-13	-16	24
2	-16	8		

zu berechnen.

Welche Werte müssen noch für das Newton-Schema vorgegeben sein, wenn allgemein die k -te Ableitung an einer Stelle x_j vorgegeben ist?

Aufgabe 8 (Erweitertes Newton-Schema)

Mithilfe der Überlegungen aus Aufgabe 7 lässt sich das Newton-Schema derart erweitern, dass außer dem Interpolationspolynom auch alle Ableitungen des Polynoms an einer Stelle x berechnet werden können.

Berechnen Sie das Interpolationspolynom $p_4(x)$ zu den Daten

x_j	0	1	2	3	4
y_j	0	1	-2	9	28

Berechnen Sie zudem mit diesem Newton-Schema auch alle Ableitungen von p_4 an der Stelle $x = -1$.

Aufgabe 9 (Abschätzung für Polynome)

Sei p ein Polynom vom Grad n und seien x_k für $k = 0, \dots, n$ die Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms T_{n+1} . Zeigen Sie, dass eine Zahl c_n existiert, sodass die Abschätzung

$$\max_{x \in [-1, 1]} |p(x)| \leq c_n \cdot \max_{k=0, \dots, n} |p(x_k)|$$

gilt. Um was für eine Zahl handelt es sich?

Die Aufgaben werden am **Mittwoch, den 26. November 2014, 09:45 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

Homepage:

Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa12014w/> erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.